Jacek Osiewalski, Jerzy Marzec, Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych, Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Nowoczesne metody Monte Carlo w bayesowskiej analizie efektywności kosztowej banków[1]

Jacek Osiewalski, Jerzy Marzec

Katedra Ekonometrii
Akademii Ekonomicznej w Krakowie

Wprowadzenie

Stochastyczne modele graniczne (ang. stochastic frontier models) zaproponowali po raz pierwszy (niezależne od siebie) Meeusen i van den Broeck (1977) oraz Aigner, Lovell i Schmidt (1977). Modele te są ostatnio wykorzystywane w badaniach empirycznych efektywności kosztowej[2] w sektorze bankowym[3]. W badaniach tych używa się klasycznych metod wnioskowania statystycznego, których własności w zastosowaniu do modeli granicznych nie są dostatecznie zbadane.

Van den Broeck, Koop, Osiewalski i Steel (1994, dalej BKOS), Koop, Steel i Osiewalski (1995), i Koop, Osiewalski i Steel (dalej KOS 1994, 1997a, 1997b, 1997c) używają metod bayesowskich do analizy stochastycznych modeli granicznych, dowodząc, że metody te mają przewagę nad podejściem klasycznym do wnioskowania w tych modelach. Bardzo ważne jest, że metody bayesowskie dostarczają dokładnych (nieasymptotycznych) procedur wnioskowania oraz w pełni uwzględniają informacje a priori i niepewność co do poprawności specyfikacji. Podejście bayesowskie było z powodzeniem wykorzystywane w zastosowaniach empirycznych, od badań nad efektywnością szpitali (KOS (1997c)) do analizy wzrostu gospodarczego państw (zob. KOS (1997a,b)). W niniejszym opracowaniu przedstawiamy bayesowskie stochastyczne modele graniczne i ich wykorzystanie do pomiaru efektywności kosztowej oddziałów banku komercyjnego. Podejście bayesowskie daje małopróbkowe i probabilistycznie interpretowalne wyniki za cenę wielowymiarowych całkowań numerycznych, których efektywną realizację stanowi tzw. losowanie Gibbsa, nowoczesna metoda Monte Carlo typu łańcuchów Markowa.

Bayesowskie stochastyczne modele graniczne

Podstawowy stochastyczny model granicznej funkcji kosztów zakłada, że odchylenie obserwowanego kosztu działalności firmy od teoretycznej, mikroekonomicznej funkcji kosztów spowodowane jest zakłóceniami czysto losowymi i nieefektywnością. W przypadku obserwacji dla N firm z T okresów czasu model ten można zapisać w formie:

$$y_{ti} = h(x_{ti}, \beta) + v_{ti} - z_{ti}, \qquad (1)$$

gdzie y_{ti} jest wartością przeciwną do logarytmu naturalnego kosztu zaobserwowanego w *i*-tej firmie w okresie *t* (i=1,..,N; t=1,...,T); x_{ti} to wektor-wiersz zmiennych egzogenicznych (będących funcjami wielkości produktów i poziomów cen czynników produkcji); h oznacza mierzalną funkcję z wektorem k nieznanych parametrów β; v_{ti} i z_{ti} są składnikami losowymi, z których pierwszy jest symetryczny względem zera, a drugi nieujemny. Zakładamy, że składniki z_{ti} i v_{ti} są niezależne od siebie, zarówno po czasie jak i po firmach. Miarą efektywności kosztowej jest $r_{ti}=\exp(-z_{ti})$, czyli łatwo interpretowalna wielkość o wartościach w przedziale (0,1]. W równaniu (1) z_{ti} reprezentuje wzrost kosztu spowodowany nieefektywnością techniczną (zbyt duża skala nakładów) lub alokacyjną (proporcje nakładów niezgodne z cenami rynkowymi czynników).

[1] Praca wykonana w ramach projektu badawczego nr 1-H02B-015-11, finansowanego przez Komitet Badań Naukowych.

[2] Przez efektywność kosztową rozumie się iloraz teroretycznego kosztu minimalnego (niezbędnego do wytworzenia danego wektora produktów przy ustalonych cenach czynników produkcji) do kosztu rzeczywiście poniesionego.

[3] zob. Bauer i Hancock (1993), Cebenoyan, Cooperman, Register i Hudgins (1993), Ferrier i Lovell (1990), Kaparakis, Miller i Noulas (1994), Mester (1993).

Wprowadzona notacja dopuszcza wykorzystanie danych przekrojowo-czasowych do estymacji przedstawionego modelu, lecz nie wyklucza użycia wyłącznie danych przekrojowych, co odpowiada przyjęciu T=1. Czynimy założenie, że z_{ti} są zmiennymi niezależnymi po *i* oraz po *t* jak w KOS (1997a,b); zob. także Pitt i Lee (1981, Model II). W KOS (1997c) zakłada się, że nieefektywność jest czystym efektem indywidualnym dla każdej z firm, czyli że $z_{ti}=z_i$ (t=1,...,T); zob. także Pitt i Lee (1981, Model I) oraz Schmidt i Sickles (1984).

Pełna bayesowska analiza parametryczna wymaga określenia 1^o rozkładu próbkowego parametryzowanego przez skończenie wymiarowy wektor $\theta\in\Theta$, 2^o rozkładu a priori dla θ. W celu spełnienia warunku 1^o zakładamy, że v_{ti} ma rozkład normalny ze średnią zero i stałą wariancją σ^2 (co oznaczamy jako $N(0,\sigma^2)$), oraz że z_{ti} ma rozkład wykładniczy ze średnią (i odchyleniem standardowym) λ_{ti}, które może zależeć od kilku (przyjmujemy, że m-1) egzogenicznych zmiennych w_{tij} (j=2,…,m) wyjaśniających systematyczne różnice w efektywności firm. W szczególności zakładamy

$$\lambda_{ti} = \prod_{j=1}^{m} \phi_j^{-w_{tij}} , \qquad \textbf{(2)}$$

gdzie $\phi_j>0$ są nieznanymi parametrami, a $w_{ti1}=1$. Jeżeli m>1, rozkład z_{ti} może być inny dla różnych *t* lub *i* albo obu indeksów, więc w KOS(1997c) taki przypadek nazywany jest modelem o zmiennym rozkładzie efektywności (Varying Efficiency Distribution - VED). Jeżeli m=1, wtedy $\lambda_{ti}=\phi_1^{-1}$, co oznacza, że wszystkie składniki reprezentujące nieefektywność są niezależnymi zmiennymi o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa. Ten przypadek nazywany jest modelem o wspólnym rozkładzie efektywności (Common Efficiency Distribution - CED). Nasza analiza zakłada, że obserwujemy wartości y_{ti} przy danych x_{ti}, $w_{ti}=(w_{ti1},...,w_{tim})$, a $\theta=(\beta', \sigma^{-2},\phi_1,...,\phi_m)'$ jest wektorem parametrów.

Rozkład a priori wektora θ może być dowolny, jednak zwykle nie wprowadza się zbyt dużo subiektywnej informacji o θ. Przyjmujemy następującą strukturę a priori:

$$p(\theta) = p(\sigma^{-2})p(\beta)p(\phi_1,\ldots,\phi_m) \propto f_G(\sigma^{-2}|\frac{n_0}{2},\frac{s_0}{2})f(\beta)\prod_{j=1}^{m} f_G\left(\phi_j|1,g_j\right), \qquad \textbf{(3)}$$

gdzie $f_G(.|a,b)$ oznacza gęstość rozkładu Gamma ze średnią a/b i wariancją a/b^2, przy czym a=1 odpowiada rozkładowi wykładniczemu. Struktura (3) odzwierciedla brak wstępnej wiedzy o wektorze β innej niż warunki regularności narzucone przez teorię ekonomi. Zakładamy więc, że albo $f(\beta)\equiv 1$ jeżeli nie uwzględnia się warunków regularności, albo $f(\beta)=1$ dla β spełniających te warunki i $f(\beta)=0$ dla pozostałych β. Odpowiedni wybór wartości $n_0>0$ i $s_0>0$ pozwoli na przyjęcie nikłej wstępnej informacji o parametrze precyzji σ^{-2}, zapewniając zarazem istnienie rozkładu a posteriori, a więc możliwość wnioskowania bayesowskiego (zob. Fernández, Osiewalski i Steel (1997)). Dla m parametrów ϕ_j przyjmujemy niezależne rozkłady wykładnicze z $g_j=1$ dla j>1 i $g_1= - \ln(r^*)$, gdzie $r^*\in(0, 1)$ jest stałą zadawaną przez badacza. W modelu CED (m=1), wielkość r^* może być interpretowana jako mediana rozkładu a priori efektywności, ponieważ jest medianą brzegowego rozkładu a priori dla $r_{ti}=\exp(-z_{ti})$; zob. BKOS. W przypadku modelu VED (m>1) rozkład a priori dla $\phi=(\phi_1,...,\phi_m)'$ jest scentrowany wokół rozkładu a priori dla przypadku CED i prawie nieinformacyjny jeśli chodzi o rolę zmiennych w_{tij}.

Ostatecznie, pełny bayesowski stochastyczny model graniczny rozważany w tej pracy jest określony przez następującą łączną funkcję gęstości, określoną na przestrzeni wszystkich TN obserwacji y_{ti} oraz wszystkich wielkości nieobserwowalnych, tj. TN wskaźników nieefektywności z_{ti} i k+1+m parametrów:

$$p(y,z,\theta|X,W) = p(\theta)\prod_{t=1}^{T}\prod_{i=1}^{N} f_N^1\left(y_{ti}|h(x_{ti},\beta)-z_{ti},\sigma^2\right) f_G\left(z_{ti}\middle|1,\prod_{j=1}^{m}\phi_j^{w_{tij}}\right) \qquad \textbf{(4)}$$

gdzie y i X oznaczają odpowiednio: wektor NT×1 obserwacji y_{ti} i macierz NT×k z x_{ti} jako wierszami; analogicznie definiujemy z i W.

Wnioskowanie bayesowskie przy użyciu losowania Gibbsa

Podejście bayesowskie pozwala opisać w sposób probabilistyczny wszystkie informacje o wielkościach nieobserwowalnych (wstępne i pochodzące z danych) w postaci rozkładu a posteriori o

gęstości $p(z, \theta \mid y, X, W)$ proporcjonalnej do (4). Dogodnym sposobem sumaryzacji wiedzy zawartej w łącznym rozkładzie a posteriori jest obliczenie takich jego charakterystyk, jak np. podstawowe momenty (wartości oczekiwane, wariancje i kowariancje). Wnioskowanie o pojedynczych parametrach czy indywidualnych wskaźnikach efektywności wymaga również wyznaczenia z $p(z, \theta \mid y, X, W)$ odpowiednich jednowymiarowych brzegowych funkcji gęstości a posteriori. Zarówno momenty jak i gęstości brzegowe są całkami, które nie mogą być znalezione analitycznie ze względu na zbyt skomplikowaną postać rozkładu a posteriori. Tradycyjne kwadratury i metody Monte Carlo z niezależnymi losowaniami nie stanowią efektywnych narzędzi przybliżania tych całek. Dlatego zastosujemy nowoczesną metodę całkowania Monte Carlo (typu łancuchów Markowa), znaną jako Gibbs Sampling. Losowanie Gibbsa jest to sposób uzyskiwania próbek z łącznego rozkładu wektora losowego α na podstawie losowania wyłącznie z pełnych rozkładów warunkowych; szczegóły podają m.in. Casella i George (1992) oraz Tierney (1994).

Przypuśćmy, że jesteśmy w stanie dokonać podziału wektora α na p podwektorów składowych $(\alpha_1',...,\alpha_p')'$ (niekoniecznie jednakowych wymiarów) w taki sposób, że losowanie z każdego z rozkładów warunkowych (dla α_i przy ustalonych pozostałych) jest relatywnie łatwe. Procedura Gibbsa polega na cyklicznym losowaniu z tak określonych rozkładów warunkowych. Mając wektor $\alpha^{(q)}$ jako wynik q-tego losowania, wektor $\alpha^{(q+1)}$ uzyskuje się w następujący sposób:

$\alpha_1^{(q+1)}$ jest losowane z $p(\alpha_1|\alpha_2=\alpha_2^{(q)},...,\alpha_p=\alpha_p^{(q)})$,
$\alpha_2^{(q+1)}$ jest losowane z $p(\alpha_2|\alpha_1=\alpha_1^{(q+1)},\alpha_3=\alpha_3^{(q)},...,\alpha_p=\alpha_p^{(q)})$,
...
$\alpha_p^{(q+1)}$ jest losowane z $p(\alpha_p|\alpha_1=\alpha_1^{(q+1)},...,\alpha_{p-1}=\alpha_{p-1}^{(q+1)})$.

Wygenerowanie jednej realizacji wektora α (cykl Gibbsa) składa się z p kroków, polegających na losowaniu z jego p podwektorów. Wartości startowe, czyli wektor $\alpha^{(0)}$, dobierane są arbitralnie. Przy pewnych ogólnych założeniach (aperiodyczność i nieredukowalność; por. Tierney (1994)), rozkład losowanego wektora $\alpha^{(q)}$ dąży do $p(\alpha)$ gdy $q \to \infty$. Posługując się rozkładami warunkowymi, uzyskujemy więc próbę z rozkładu łącznego (choć tylko asymptotycznie). W praktyce potrzeba zwykle dużej liczby cykli wstępnych (lub inaczej spalonych), zanim uzyskamy zbieżność do $p(\alpha)$.

W celu skutecznego wykorzystania algorytmu Gibbsa do wnioskowania bayesowskiego o parametrach oraz efektywnościach firm w modelu (1), dokonujemy sekwencyjnego losowania z następujących rozkładów warunkowych:

$$p(\sigma^{-2}|y,X,W,z,\beta,\varphi) = f_G(\sigma^{-2}|\frac{n_0+TN}{2},\frac{1}{2}\{s_0+\sum_{t,i}[y_{ti}+z_{ti}-h(x_{ti},\beta)]^2\}), \quad \textbf{(5)}$$

$$p(\beta|y,X,W,z,\sigma^{-2},\varphi) \propto f(\beta)\exp[-\frac{1}{2}\sigma^{-2}\sum_{t,i}(y_{ti}+z_{ti}-h(x_{ti},\beta))^2], \quad \textbf{(6)}$$

$$p(z|y,X,W,\theta) = \prod_{t=1}^{T}\prod_{i=1}^{N}[\Phi(m_{ti}/\sigma)]^{-1} f_N^1(z_{ti}|m_{ti},\sigma^2)I(z_{ti}\geq 0), \quad \textbf{(7)}$$

gdzie: $m_{ti} = h(x_{ti},\beta) - y_{ti} - \sigma^2/\lambda_{ti}$, $\Phi(.)$ oznacza dystrybuantę rozkładu N(0,1), a λ_{ti} jest dane wzorem (2); (7) jest więc iloczynem uciętych rozkładów normalnych;

$$p(\phi_j|data,z,\phi_{(-j)}) \propto f_G(\phi_j|1+\sum_{t,i}w_{tij},g_j)\exp(-\phi_1\sum_{t,i}z_{ti}D_{ti1}), \quad j=1,...,m; \quad \textbf{(8)}$$

gdzie

$$D_{tir} = \prod_{j\neq r}\phi_j^{w_{tij}}$$

dla r=1,...,m (D_{ti1}=1 gdy m=1) i $\phi_{(-j)}$ oznacza wektor ϕ bez j-tej współrzędnej. Ponieważ w_{ti1}=1, więc rozkład warunkowy dla ϕ_1 jest rozkładem Gamma o parametrach $1+NT$ i $g_1+z_{11}D_{111}+...+z_{TN}D_{TN1}$.

W zależności od postaci funkcji $h(x_{ti}, \beta)$ w modelu (1) oraz od wartości jakie przyjmują zmienne w_{tij} dla j>2, pełne warunkowe rozkłady a posteriori dla β i dla ϕ_j (j=2,...,m) mogą być proste albo bardzo skomplikowane. Losowanie z niestandardowego rozkładu warunkowego w ramach schematu Gibbsa

wymaga specjalnych technik, jak losowanie z odrzucaniem czy algorytm Metropolisa i Hastingsa (patrz np. Tierney (1994) lub O'Hagan (1994)). Procedury te odznaczają się dużym skomplikowaniem i wymagają dodatkowego wkładu pracy użytkownika. Warto zatem podkreślić, że istnieją dwa ważne przypadki szczególne, kiedy losowanie z rozkładów (6) i (8) jest proste: 1^o postać funkcji granicznej jest liniowa względem β, 2^o w_{tij} (j=2,...,m) jest zmienną dychotomiczną (zero-jedynkową).

Jeżeli $h(x_{ti},\beta)=x_{ti}\beta$ (np. funkcje: Cobba i Douglasa oraz translogarytmiczna), to wzór (6) przedstawia gęstość k-wymiarowego rozkładu normalnego, uciętego w przypadku restrykcji nałożonych na parametry. Otrzymujemy zatem:

$$p(\beta|y,X,W,z,\sigma^{-2},\varphi) \propto f(\beta)\, f_N^k(\beta|\hat{\beta},\sigma^2(X'X)^{-1}), \qquad \textbf{(9)}$$

gdzie $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'(y+z)$.

Dychotomiczny charakter zmiennych wyjaśniających różnice w efektywności (w_{tij}; j=2,...,m) upraszcza postać funkcji we wzorze (8), która w tym przypadku jest gęstością rozkładu gamma postaci:

$$p(\phi_j|data,z,\phi_{(-j)}) = f_G\Big(\phi_j\Big|1+\sum_{t,i} w_{tij},\ g_j+\sum_{t,i} w_{tij}\, z_{ti}\, D_{tij}\Big). \qquad \textbf{(10)}$$

Po odrzuceniu odpowiedniej liczby wstępnych cykli Gibbsa, wartość oczekiwana a posteriori dowolnej funkcji $g(\theta, z)$ może być aproksymowana poprzez średnią wartość tej funkcji dla M wylosowanych wektorów $(\theta^{(q)}\ z^{(q)})$:

$$E\big[g(\theta,z)\big|y,X,W\big] \approx \frac{1}{M}\sum_{q=1}^{M} g(\theta^{(q)},z^{(q)}). \qquad \textbf{(11)}$$

Przykład empiryczny: efektywność kosztowa oddziałów banku

Przedstawiamy bayesowski stochastyczny model graniczny krótkookresowej funkcji kosztów, oszacowany w oparciu o dane pochodzące z N=58 oddziałów jednego z polskich banków. Użyliśmy jedynie danych przekrojowych z jednego okresu czasu (T=1; pierwszy kwartał 1997 roku),a zatem subskrypt *t* jest pominięty. Nasz model można zapisać w formie

$$\ln\left(\frac{VC_i}{w_{i,Bor}}\right) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln\left(\frac{w_{i,Com}}{w_{i,Bor}}\right) + \alpha_2 \ln\left(\frac{w_{i,Dep}}{w_{i,Bor}}\right) + \alpha_3 \ln\left(\frac{w_{i,Lab}}{w_{i,Bor}}\right) \qquad \textbf{(12)}$$

$$+\alpha_4 \ln(K_i) + \alpha_5 \ln(Q_i) + \alpha_6 \ln^2(Q_i) - v_i + z_i, \qquad i = 1,K,N,$$

gdzie:

VC = suma kosztu zatrudnienia pracowników oddziału banku (wynagrodzenia wraz z narzutami), kosztu zaangażowania kapitału fizycznego z wyjątkiem nieruchomości oraz kosztu zaangażowania czynnika finansowego (depozytów i innych pozyskanych środków pieniężnych).

w_{Lab} = cena pracy = (wynagrodzenia wraz z narzutami)/(liczba zatrudnionych w przeliczeniu na pełne etaty),

w_{Dep} = cena czynnika finansowego (depozytów) = (koszty odsetkowe)/(wartość depozytów),

w_{Bor} = cena środków pieniężnych pozyskanych z centrali banku i innych oddziałów,

w_{Com} = średnia cena komputerów, oprogramowania, materiałów biurowych i innych usług świadczonych przez dostawców z zewnątrz,

K = wartość brutto nieruchomości i inwestycji w nieruchomości,

Q = agregat wartości różnego rodzaju kredytów + nadwyżka depozytów nad kredytami (jeżeli jest dodatnia).

Przedstawiona specyfikacja czynników produkcji i produktów banku wynika z mikroekonomicznej analizy dokonanej przez Sealeya i Lindleya (1977), według których bank przy użyciu pracy, kapitału fizycznego i depozytów produkuje aktywa generujące przychód.[4] Zatem depozyty i inne pozyskane pieniądze traktujemy jako czynnik produkcji (kapitał finansowy) a środki, które przynoszą bezpośredni przychód, jako zagregowany produkt banku. To podejście, zwane często podejściem intermediacyjnym

[4] Bardziej szczegółowe omówienie tej koncepcji przedstawia Marzec (1998).

(ang. *intermediation approach*), jest przyjmowane w wielu pracach empirycznych z tego zakresu, wykorzystujących zarówno narzędzia ekonometryczne jak programowania matematycznego[5].

Konsekwencją przyjętego podejścia jest fakt, że VC zawiera zarówno koszty operacyjne działalności banku jak i koszty odsetkowe. Na produkt (Q) składają się różne formy kredytów dla osób fizycznych i prawnych, a także nadwyżka (tylko dodatnia) depozytów na kredytami. Wyróżnienie tego ostatniego składnika zagregowanego produktu jest spowodowane faktem, że rozważania dotyczą nie samodzielnych banków, lecz oddziałów jednego banku, których niektóre obszary działania są regulowane przez centralę banku. Występuje specjalizacja oddziałów, które różnią się w zakresie świadczonych usług w zależności od geograficznej lokalizacji, charakteru lokalnego rynku i potrzeb klientów. Podstawowy podział wyróżnia oddziały depozytowe tj. takie, które specjalizują się w pozyskiwaniu pieniędzy (depozytów) od ludności i przedsiębiorstw (mają zatem nadwyżkę depozytów w stosunku do wartości udzielonych kredytów) oraz oddziały kredytowe, gdzie wartość udzielonych kredytów przewyższa wartość depozytów. Oddziały z pierwszej grupy uzyskują środki pieniężne, które są wykorzystywane przez te drugie oddziały. Cena tych środków jest stała i służy do korekty wyników z działalności operacyjnej oddziałów. Zatem środki te należy traktować w przypadku oddziałów kredytowych jako dodatkowy czynnik produkcji (o cenie w_{Bor}, stałej po oddziałach), a w przypadku oddziałów depozytowych jako produkt. Ponadto cena komputerów, drukarek, akcesoriów komputerowych, oprogramowania oraz innych usług obcych (w_{Com}) może być traktowana jako stała dla wszystkich oddziałów, ponieważ jest ona negocjowana przez centralę banku z potencjalnymi dostawcami w drodze przetargu.

We wzorze (12) zakładamy, że jeden ze składników kapitału fizycznego (reprezentowany przez nieruchomości i inwestycje w nieruchomości) jest czynnikiem stałym, którego koszt zaangażowania jest kosztem stałym, nie wchodzącym w skład VC. A zatem wzór (12) przedstawia krótkookresową funkcję kosztu zmiennego (Variable Cost) oddziałów banku. Skoro dwie ceny czynników (w_{Com}) i (w_{Bor}) są stałe dla oddziałów, postać stochastycznego modelu granicznego przyjmuje uproszczoną formę

$$\ln(VC_i) = \beta_1 + \beta_2 \ln(w_{i,Dep}) + \beta_3 \ln(w_{i,Lab}) + \beta_4 \ln(K_i) + \beta_5 \ln(Q_i) + \\ + \beta_6 \ln^2(Q_i) - v_i + z_i, \qquad i = 1,K\ ,N, \tag{13}$$

gdzie: $\beta_j = \alpha_j$ dla j=2,…,6; $\beta_1 = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(w_{Com}) + (1- (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3))\ln(w_{Bor})$.

Forma funkcyjna w (12) i (13) została użyta m.in. przez Christensena i Greene'a (1976) dla funkcji kosztu przedsiębiorstw branży energetycznej USA w 1970 roku. Postać jej uogólnia funkcję Cobba i Douglasa przez dopuszczenie zmiennego efektu skali, zależnego od wielkości produkcji Q. Współczynnik efektu skali wyznaczony z równania (13) wynosi

$$RTS_i = \varepsilon_i^{-1} = \left(\beta_5 + 2\beta_6 \ln(Q_i)\right)^{-1} \qquad i = 1,K\ ,N, \tag{14}$$

i przedstawia zmiany skali produkcji spowodowane przez proporcjonalny wzrost nakładów czynników zmiennych.

Podstawowy warunek ekonomicznej regularności, tj. homogeniczność względem cen nałożona w modelu (12), jest automatycznie spełniona w modelu (13). Monotoniczność względem cen wymaga, aby $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ i $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 < 1$ w (12), co prowadzi do warunków $\beta_2, \beta_3 > 0$ i $\beta_2+\beta_3 < 1$ w (13). Przy danym Q i cenach czynników produkcji wzrost zaangażowania czynnika stałego, K, powinien powodować spadek nakładów pozostałych czynników, prowadząc do mniejszego poziomu kosztu zmiennego; zatem oczekujemy, że $\beta_4<0$. Oczywiście wymagamy, aby $RTS_i>0$ dla wszystkich i. Warunki regularności narzucamy poprzez rozkład a priori dla wektora parametrów $\beta= (\beta_1 \ldots \beta_6)'$. Zatem przyjmujemy strukturę rozkładu a priori daną wzorem (3), gdzie $f(\beta)$ jest funkcją wskaźnikową restrykcji.

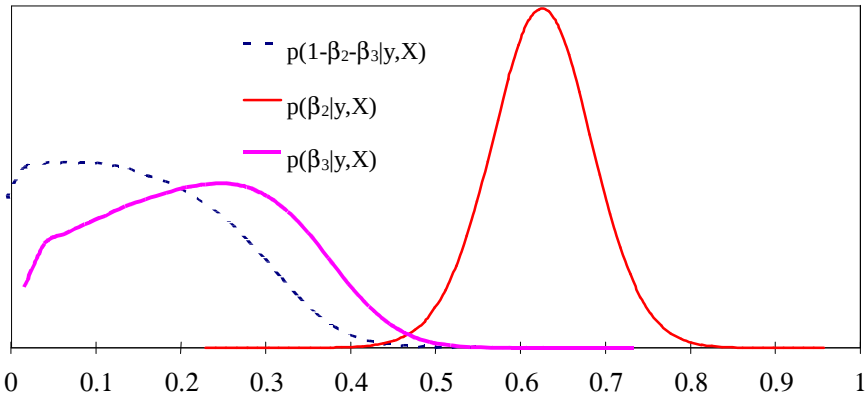
W pierwszym estymowanym modelu przyjęliśmy założenie, że rozkład a priori dla nieefektywności jest identyczny dla wszystkich oddziałów, czyli rozważaliśmy model CED (m=1, nie wprowadziliśmy egzogenicznych przyczyn zróżnicowania efektywności). Przyjęliśmy $r^*=0.7$ jako wartość mediany a priori rozkładu efektywności. Dla parametru precyzji przyjęliśmy a priori $n_0=s_0=10^6$, co prowadzi do bardzo rozproszonego rozkładu Gamma (ze średnią 1 i wariancją $2*10^6$), odzwierciedlającego niewielka wiedzę a priori o tym parametrze.

[5] zob. Akhaiven, Swamy, Taubman i Singamsetti (1997), Berger (1993), Berger i Humphrey (1991), Cebenoyan, Cooperman, Register i Hudgins (1993), Dietsch (1993), English, Grosskopf, Hayes i Yaiswarng (1993), Grabowski, Ragan i Rezvanian (1993), Hughes i Mester (1993), Humphrey (1993), Kaparakis, Miller i Noulas (1994) Mester (1993), Muldur i Sassenou (1993).

Tabela 1. Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe a posteriori parametrów modelu (13).

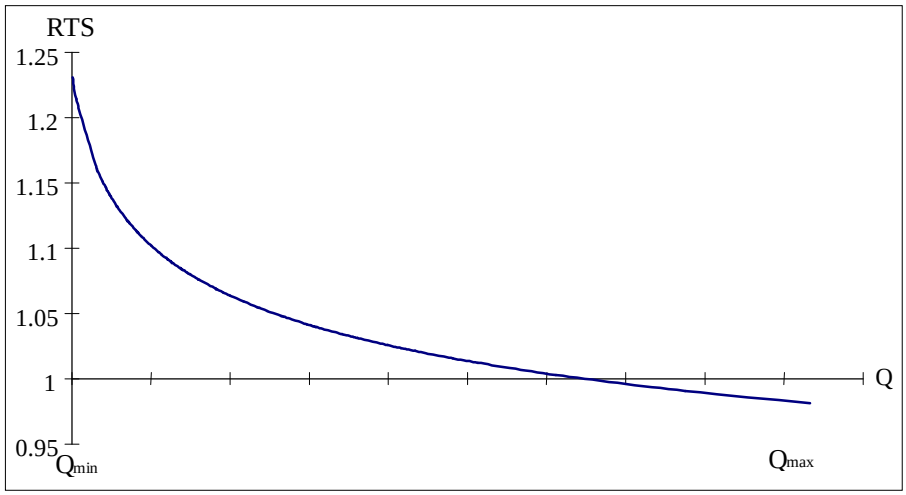
Parametr	E(•|y,X)	D(•|y,X)
β_1	4.034	8.713
β_2	0.632	0.062
β_3	0.163	0.103
β_4	-0.006	0.005
β_5	-0.057	0.946
β_6	0.027	0.026
$Var(v_i)= \sigma^2$	0.100	0.004
$E(z_i)=\lambda_i=\phi_1^{-1}$	0.012	0.031

Wyniki a posteriori dla wektora 66 nieznanych parametrów i wskaźników efektywności uzyskano przy użyciu $2*10^6$ cykli Gibbsa; wyniki otrzymywane w krótszych (wstępnych) przebiegach były prawie identyczne, co praktycznie oznacza zbieżność algorytmu. Tabela 1 prezentuje wartości oczekiwane i odchylenia standardowe a posteriori parametrów granicznej funkcji kosztów. Spośród cen czynników produkcji, stopa oprocentowania depozytów (cena kapitału finansowego) wywiera największy wpływ na kształtowanie się kosztu zmiennego. Wpływ ceny pracy jest znacznie mniejszy, ponieważ jej średnia a posteriori jest dużo mniejsza a odchylenie standardowe dużo większe. Otrzymaliśmy też charakterystyki rozkładu dla sumy elastyczności względem tych cen czynników, które są stałe dla wszystkich oddziałów, czyli dla $1-(\beta_2+\beta_3)$; wartość oczekiwana rozkładu a posteriori oraz jego odchylenie standardowe wynoszą 0.205 i 0.110. Poniższy rysunek przedstawia brzegowe gęstości a posteriori dla elastyczności względem cen czynników.

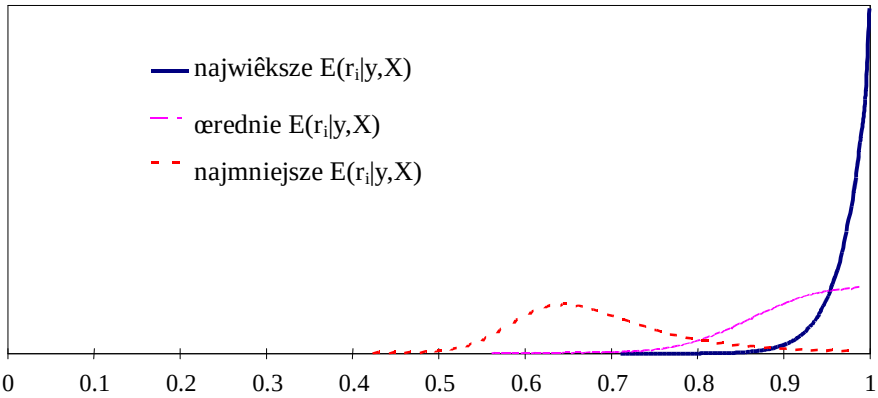


Warunki regularności ekonomicznej, nałożone na postać rozkładów a priori parametrów, są wiążące w szczególności dla β_4, a także dla β_3. Rola czynnika stałego (nieruchomości) w wyjaśnianiu kosztu zmiennego jest bardzo mała (lub żadna). W przypadku, gdy na parametr β_4 nie narzucono restrykcji, średnia rozkładu a posteriori była większa od zera, lecz nie miało to istotnego wpływu na wnioskowanie o pozostałych parametrach.

Przyjęta postać granicznej funkcji kosztów zakłada, że współczynnik efektu skali zależy od wielkości produkcji, por. (14). Na poniższym rysunku przedstawiamy RTS_i jako funkcję Q_i, dla β_5 i β_6 równych ich wartościom oczekiwanym a posteriori. Wzrost kosztu zmiennego o 1% odpowiada wzrostowi produkcji najmniejszego oddziału o ok. 1.23%, wzrostowi produkcji oddziałów przeciętnych o ok. 1.08% oraz wzrostowi produkcji o ok. 0.98% w przypadku największego oddziału. Dla prawie wszystkich oddziałów wartość RTS_i jest większa od jedności, wskazując na rosnący efekt skali.



W Tabeli 2 prezentowane są wartości oczekiwane i odchylenia standardowe a posteriori wskaźników efektywności $r_i=\exp(-z_i)$, dla wszystkich oddziałów (uporządkowanych rosnąco względem wielkości produkcji). Ponadto ujęte są informacje, czy dany oddział posiada więcej depozytów niż kredytów ($w_{i2}=0$) czy nie. Założyliśmy a priori, że około 50% oddziałów charakteryzuje się wskaźnikiem efektywności poniżej 0.7. Na podstawie danych wnioskujemy, że efektywność kosztowa oddziałów jest dużo wyższa, gdyż średnia arytmetyczna wartości oczekiwanych a posteriori dla r_i wynosi 0.924, przy średniej 0.044 dla odchyleń standardowych. Indywidualne wskaźniki efektywności są silnie zróżnicowane, a ich wartości oczekiwane a posteriori wahają się od 0.694 do 0.972. Zauważmy, że wyniki bayesowskie wskazują jednak na mniejsze zróżnicowanie efektywności niż wstępne wyniki, które prezentuje Marzec (1998). Rysunek poniżej prezentuje brzegowe gęstości a posteriori $p(r_i|y,X)$ dla oddziałów charakteryzujących się maksymalną, średnią i minimalną wartością oczekiwaną rozkładu a posteriori r_i. Przyczyną silnego rozproszenia rozkładów brzegowych jest fakt, że wnioskowanie odbywa się na podstawie danych przekrojowych (jedna obserwacja dla jednego r_i).



Przyglądając się bliższej Tabeli 2 odkrywamy, że oddziały depozytowe są bardziej efektywne niż kredytowe. Zatem w_{i2} wydaje się być istotną zmienną wyjaśniającą systematyczne różnice w efektywności kosztowej. Estymacja modelu VED (m=2), gdzie dla oddziału depozytowego $w_{i2}=0$, potwierdza te przypuszczenia. Jednakże wnioski z badań empirycznych powinny być formułowane z całą ostrożnością, ponieważ prezentowane wyniki uzyskano na podstawie danych przekrojowych. Oczekujemy, że uzyskanie pogłębionych i precyzyjniejszych charakterystyk efektywności kosztowej jest możliwe poprzez użycie danych przekrojowo-czasowych i bardziej wyrafinowanej granicznej funkcji kosztów, przy pełnym wykorzystaniu możliwości proponowanych technik Monte Carlo.

Tabela 2. Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe a posteriori wskaźników efektywności.

i	w_{i2}	$E(r_i \mid data)$	$D(r_i \mid data)$		i	w_{i2}	$E(r_i \mid data)$	$D(r_i \mid data)$
1	1	0.794	0.114		30	1	0.895	0.066
2	1	0.894	0.081		31	1	0.852	0.078
3	1	0.958	0.038		32	0	0.948	0.043
4	1	0.811	0.089		33	0	0.936	0.049
5	0	0.939	0.048		34	0	0.917	0.058
6	0	0.945	0.045		35	0	0.943	0.046
7	0	0.942	0.047		36	1	0.820	0.085
8	0	0.937	0.050		37	1	0.731	0.090
9	1	0.790	0.090		38	0	0.926	0.054
10	0	0.900	0.066		39	1	0.779	0.089
11	0	0.935	0.050		40	0	0.940	0.048
12	1	0.843	0.081		41	0	0.952	0.041
13	1	0.970	0.029		42	0	0.916	0.059
14	0	0.944	0.045		43	1	0.877	0.074
15	0	0.953	0.040		44	0	0.894	0.068
16	0	0.906	0.063		45	0	0.918	0.058
17	0	0.940	0.047		46	0	0.832	0.088
18	1	0.891	0.070		47	0	0.925	0.055
19	0	0.948	0.043		48	1	0.860	0.078
20	1	0.942	0.046		49	0	0.945	0.045
21	0	0.906	0.063		50	0	0.917	0.059
22	0	0.949	0.042		51	1	0.764	0.091
23	0	0.945	0.045		52	0	0.972	0.027
24	1	0.834	0.082		53	0	0.927	0.055
25	1	0.904	0.064		54	0	0.929	0.054
26	0	0.945	0.044		55	1	0.932	0.052
27	1	0.905	0.064		56	0	0.925	0.057
28	1	0.694	0.090		57	0	0.954	0.041
29	1	0.799	0.087		58	1	0.815	0.098
Średnia dla oddziałów z $w_{i2}=0$							0.931	0.051
Średnia dla oddziałów z $w_{i2}=1$							0.848	0.076

Bibliografia

[1] Aigner, D., C.A.K. Lovell, and P. Schmidt (1977). "Formulation and estimation of stochastic frontier productions function models," **Journal of Econometrics**, 6, 21-37.

[2] Akhaiven J., P.A.V.B. Swamy, S.B. Taubman, R.N. Singamsetti (1997), "A general method of deriving the inefficiencies of bank from a profit function", **The Journal of Productivity Analysis**, 8.

[3] Bauer W.B., D. Hancock (1993), "The efficiency of the Federal Reserve in providing check processing services", **Journal of Banking and Finance**, 17.

[4] Berger A. N. (1993), "'Distribution-free' estimates of efficiency in the U.S. banking industry and tests of the standard distributional assumptions", **The Journal of Productivity Analysis**, 4.

[5] Berger A. N., D.B. Humphrey (1991), "The dominace of inefficiencies over scale and product mix economies in banking", **Journal of Monetary Economics**, 28.

[6] Broeck van den, J., G. Koop, J. Osiewalski, and M. Steel (1994). "Stochastic frontier models: A Bayesian perspective," **Journal of Econometrics**, 61, 273-303.

[7] Casella, G. and E. George (1992). "Explaining the Gibbs sampler," **The American Statistician**, 46, 167-174.

[8] Cebenoyan A.S., E.S. Cooperman, C.A. Register, S.C. Hudgins (1993), "The relative efficieny of

stock versus Mutual S&Ls: A stochastic cost frontier approach", **Journal of Financial Services Research**.

[9] Christensen L.R., W.H. Greene (1976), Economics of scale in U.S. electric power generation, **Journal of Political Economy**, 84, 655-676.

[10]Dietsch M. (1993), "Economies of scale and scope in French commercial banking industry", **Journal of Productivity Analysis**, 4.

[11]English M., S. Grosskopf, K. Hayes., S. Yaiswarng (1993), "Output allocative and technical efficiency of banks", **Journal of Banking and Finance**, 17.

[12]Fernández, C., J. Osiewalski and M.F.J. Steel (1997). "On the use of panel data in stochastic frontier models with improper priors," **Journal of Econometrics**, 79, 169-193.

[13]Ferrier G.D., C.A.K. Lovell (1990), "Measuring cost efficiency in banking: econometric and linear programming evidence", **Journal of Econometrics**, 46.

[14]Grabowski R., N. Ragan, R. Rezvanian (1993), "Organizational forms in banking: An empirical investigation of cost efficiency", **Journal of Banking and Finance**, 17.

[15]Greene, W.H. (1990). "A gamma-distributed stochastic frontier model," **Journal of Econometrics**, 46, 141-163.

[16]Hughes J., L.J. Mester (1993), "A quality and risk-adjusted cost function for banks: Evidence on the "too-big-to-fail" doctrine", **Journal of Productivity Analysis**, 4.

[17]Humphrey D. (1993), "Cost and technical change: Effects from bank deregulation", **Journal of Productivity Analysis**, 4.

[18]Kaparakis E., S. M. Miller, A.G. Noulas, (1994), "Short-run cost inefficiency of commercial banks: A flexible stochastic frontier approach", **Journal of Money, Credit, and Banking**, 26.

[19]Koop, G, J. Osiewalski, M.F.J. Steel (1994). "Bayesian efficiency analysis with a flexible form: The AIM cost function," **Journal of Business and Economic Statistics**, 12, 339-346.

[20]Koop, G, J. Osiewalski, M.F.J. Steel (1997a). "The components of output growth: A stochastic frontier analysis," manuscript.

[21]Koop, G, J. Osiewalski, M.F.J. Steel (1997b). "Measuring the sources of output growth in a panel of countries," manuscript.

[22]Koop, G, J. Osiewalski, M.F.J. Steel (1997c). "Bayesian efficiency analysis through individual effects: Hospital cost frontiers," **Journal of Econometrics**, 76, 77-105.

[23]Koop, G., M.F.J. Steel, J. Osiewalski (1995). "Posterior analysis of stochastic frontier models using Gibbs Sampling," **Computational Statistics**, 10, 353-373.

[24]Marzec J. (1998) "Produkty i czynniki produkcji w badaniach efektywności kosztowej banków", [w:] **Zastosowania rozwiązań informatycznych w bankowości**, materiały konferencyjne, Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu (niniejszy tom).

[25]Meeusen, W. and J. van den Broeck (1977). "Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed error", **International Economic Review**, 8, 435-444.

[26]Mester L.J. (1993), "Efficiency in the savings and loan industry", **Journal of Banking and Finance**, 17.

[27]Muldur U., Sassenou M. (1993), "Economies of scale and scope in French banking and savings insitutions", **Journal of Productivity Analysis**, 4.

[28]O'Hagan, A. (1994). **Bayesian Inference**, Edward Arnold, London.

[29]Pitt, M.M. and L.F. Lee (1981). "The measurement and sources of technical inefficiency in the Indonesian weaving industry," **Journal of Development Economics**, 9, 43-64.

[30]Schmidt, P. and R.C. Sickles (1984)."Production frontiers and panel data," **Journal of Business and Economic Statistics**, 2, 367-374.

[31]Sealey C.W., J.T. Lindley (1977), "Inputs, outputs, and a theory of production and cost at depository financial institutions", **Journal of Finance**, 32.

[32]Tierney, L. (1994). "Markov chains for exploring posterior distributions," (with discussion), **Annals of Statistics**, 22, 1701-1762.