

Jerzy Marzec

BAYESOWSKI MODEL TOBITOWY Z ROZKŁADEM t STUDENTA W ANALIZIE NIESPŁACALNOŚCI KREDYTÓW¹

1. Wprowadzenie

Głównym celem niniejszego artykułu jest prezentacja i praktyczne wykorzystanie modelu tobitowego z użyciem podejścia bayesowskiego w analizie niespłacalności kredytów detalicznych. W szczególności, przedstawiony zostanie model tobitowy z rozkładem t Studenta, będący uogólnieniem standardowego modelu tobitowego (z rozkładem normalnym), który jest najczęściej wykorzystywany w praktyce.

Modele regresji dla ograniczonych zmiennych endogenicznych, dla tzw. zmiennych uciętych lub cenzurowanych (ang. truncated or censored data), znane są już od pięćdziesięciu lat. Po raz pierwszy na gruncie ekonomii cenzurowany model regresji został zaproponowany przez Jamesa Tobina w pionierskiej pracy z 1958 roku, stąd w literaturze przyjęła się nazwa modelu tobitowego.² Za pomocą modelu regresji analizował on zależność między wydatkami na dobra trwałego użytku gospodarstw domowych a ich dochodami netto, zgromadzonymi oszczędnościami oraz wiekiem głowy rodziny. Nowatorstwo badań Tobina polegało na uwzględnieniu dużej grupy gospodarstw, stanowiących 30% liczebności próby, których wydatki na wspomniane dobra z konieczności wynosiły zero. Modele regresji cenzurowanej stosowane są zarówno w ekonomii, socjologii jak i na gruncie nauk przyrodniczych oraz inżynieryjnych. Przykłady zastosowań w ekonomii zostały przedstawione m.in. w pracach: McDonald, Moffitt [1980], Amemiya [1985] oraz Gruszczyński [1997].

Lata siedemdziesiąte i osiemdziesiąte poprzedniego stulecia przyniosły intensywny rozwój metodologiczny modeli tej klasy. Amemiya [1985] wyróżnia pięć typów modeli tobitowych, mających oprócz najprostszego (standardowego modelu tobitowego) strukturę modelu wielorównaniowego, składającego się z równań postaci regresji dla endogenicznych zmiennych cenzurowanych lub dychotomicznych. Natomiast podstawowy przegląd modeli tobitowych dla danych panelowych prezentuje m.in. Gruszczyński [1997]. Główną cechą wyróżniającą klasyczne modele tobitowe jest przyjęcie założenia o rozkładzie normalnym, co umożliwiło m.in. na zastosowanie metody największej wiarygodności (MNV). W pracach Arabmazar, Schmidt [1982] oraz Goldberger [1983] zbadano własności estymatora największej wiarygodności w przypadku, gdy prawdziwy rozkład jest inny niż normalny. Metodą symulacji wykazano

¹ Artykuł powstał w ramach badań statutowych finansowanych przez Akademię Ekonomiczną w Krakowie w roku 2004 r. Autor dziękuje Profesorowi Jackowi Osiewalskiemu za cenne uwagi merytoryczne i dyskusje.

² Historycznie pierwszą pracą dotyczącą modelu dla zmiennej o rozkładzie uciętym był artykuł A. Halda z 1949 roku pt. *Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of a Normal Distribution Which is Truncated at a Known Point* w *Skandinavisk Aktuarietidskrift* (nr 32, s. 119-134).

obciążenie estymatora największej wiarygodności w przypadku rozkładu logistycznego, Laplace'a i rozkładu t Studenta o znanej liczbie stopni swobody.

Zatem, z metodologicznego punktu widzenia, interesujące jest rozważanie modelu tobitowego przy założeniu szerszej klasy rozkładów. Autor proponuje rozkład t Studenta z nieznaną liczbą stopni swobody oraz wnioskowanie bayesowskie jako metodę estymacji i weryfikacji modelu. Ta klasa rozkładów obejmuje rozkład normalny jako przypadek graniczny, więc w naturalny sposób istnieje możliwość statystycznego testowania wprowadzonego uogólnienia. Ponadto warto wspomnieć, że w badaniach empirycznych z zakresu analizy ryzyka kredytowego, spośród modeli ekonometrycznych, najczęściej stosuje się modele dla danych jakościowych (dwumianowe, wielomianowe). Wówczas zmienna endogeniczna mierzona jest na skali naturalnej lub porządkowej (w przypadku modeli wielomianowych dla kategorii uporządkowanych). Zastosowanie modelu tobitowego pozwala na uwzględnienie pełniejszej informacji o zmiennej endogenicznej, której wartości są cenzurowane, ale mierzone na skali mocniejszej – ilorazowej.

2. Standardowy model tobitowy

Standardowy model tobitowy dla ciągłej zmiennej y_t , której wartości są ograniczone od dołu przez zero, ma postać:

$$\begin{cases} y_t = 0 & \text{gdy } z_t \leq 0 & \text{dla } t = 1, \dots, T_0, \\ y_t = z_t & \text{gdy } z_t > 0 & \text{dla } t = T_0 + 1, \dots, T, \\ z_t = x_t \beta + \varepsilon_t, \end{cases} \quad (1)$$

gdzie $(\beta, \sigma^2) \in R^k \times (0, +\infty)$ są parametrami modelu, x_t jest wektorem-wierszem k zmiennych egzogenicznych i np. $x_{t1} \equiv 1$, zaś składniki losowe ε_t są niezależne o rozkładzie normalnym z zerową średnią i nieznaną wariancją σ^2 . W powyższej specyfikacji zmienna z_t jest zmienną ukrytą, której realizacje decydują o tym, jakie obserwujemy wartości zmiennej zależnej y_t .

Na gruncie klasycznym do estymacji modelu (1) stosuje się przede wszystkim metodę największej wiarygodności, co było propozycją Halda, Cohena i Tobina. Znaczący wkład w rozwój i teoretyczne uzasadnienie tej metody w standardowym modelu tobitowym miał m.in. Amemiya [1973] i Olsen [1978]. Amemiya udowodnił, że estymator MNW w modelu (1) jest estymatorem zgodnym i posiada asymptotyczny rozkład normalny. Natomiast Olsen wykazał, że estymator MNW jest jednoznacznie określony, gdy przyjmie się parametryzację postaci: $c = \beta/\sigma$ i $h = 1/\sigma$. W chwili obecnej istnieje bogata literatura monograficzna na temat modeli tobitowych, np. Maddala [1983] lub Gourieroux [2000].

Z uwagi na asymptotyczne obciążenie estymatora MNW w standardowym modelu tobitowym, gdy założenie o rozkładzie normalnym dla składnika ε_t nie jest spełnione, istnieje potrzeba uchylecia założenia m.in. o normalności i wprowadzenia explicite rozkładu z szerszej klasy. W niniejszym artykule proponuje się zastosowanie rozkładu t Studenta o nieznaną liczbę stopni swobody. Wymaga to jednak wykorzystania innej metody estymacji niż MNW, ponieważ jej własności, nawet w modelu regresji liniowej ze składnikiem losowym o rozkładzie t Studenta z nieznanym parametrem stopni swobody, nie są poznane. Ten ostatni wniosek stał się motywem do wykorzystania podejścia bayesowskiego.

3. Model tobitowy z rozkładem t Studenta i jego bayesowska specyfikacja

Rozważmy model danych cenzurowanych określony wzorem (1), gdzie składnik losowy ε_t ma jednowymiarowy rozkład t Studenta z ν stopniami swobody, z parametrem niecentralności (modalną) równym zero i precyzją τ ($\nu > 0$ i $\tau > 0$). Wprowadzenie dodatkowego parametru ν umożliwia naturalne uwzględnienie modelu standardowego jako przypadku granicznego, gdy $\nu \rightarrow +\infty$. Ponadto, jak sugerują

Albert i Chib [1993], rozkład logistyczny, który często stosuje się w przypadku danych jakościowych, można aproksymować rozkładem t Studenta o około 7–9 stopniach swobody.³ Zatem w ramach modelu t Studenta istnieje prosta możliwość testowania empirycznej adekwatności dwóch wspomnianych specyfikacji.

Ponadto przypomnijmy, że zmienna ε_t posiada rozkład t Studenta z ν stopniami swobody, z modalną μ (równą zero) i precyzją τ , jeżeli funkcja gęstości jej rozkładu ma postać:

$$f_s(\varepsilon_t|\mu, \nu, \tau) = B\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\tau}{\nu}\right)^{0.5} \cdot \left(1 + \frac{\tau}{\nu}(\varepsilon_t - \mu)^2\right)^{-0.5(\nu+1)}, \quad (2)$$

gdzie $B\left(\frac{1}{2}\nu, \frac{1}{2}\right)$ jest funkcją beta. Zauważmy, że rozkład próbkowy dla obserwacji y_t jest rozkładem dyskretno–ciągłym

$$\begin{aligned} p(y_t|\theta) &= \Pr(z_t \leq 0|\theta) = \Pr(\varepsilon_t \leq -x_t\beta|\theta) = F_s(-x_t\beta|\theta) \quad \text{dla } y_t = 0 \\ p(y_t|\theta) &= f_s(y_t|x_t\beta, \nu, \tau) \quad \text{dla } y_t > 0 \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie $F_s(a|\theta)$ – jest dystrybuantą rozkładu t Studenta zmiennej ε_t obliczoną w punkcie a , zaś wektor θ oznacza wektor nieznanych parametrów modelu.

W modelu z rozkładem t Studenta warunkowa wartość oczekiwana y_t względem obserwacji cenzurowanych wyraża się wzorem (zakładamy $\nu > 1$)

$$E(y_t|\theta, y_t > 0) = \frac{f_s(c_t)}{1 - F_s(c_t)} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\nu + c_t^2}{\nu - 1} - c_t, \quad (4)$$

natomiast bezwarunkowa wartość oczekiwana ma postać

$$E(y_t|\theta) = [1 - F_s(c_t)] \cdot E(y_t|y_t > 0), \quad (5)$$

gdzie $f_s(c_t)$ jest funkcją gęstości zmiennej ε_t w punkcie $c_t = -x_t\beta$. Zauważmy, że obie te wielkości są skomplikowanymi funkcjami oryginalnych parametrów. Przedmiotem szczególnego zainteresowania są także efekty krańcowe, które określają siłę i kierunek wpływu zmiany o małą jednostkę j -tej zmiennej egzogenicznej na wartości zmiennej objaśnianej (zał. $\nu > 1$):

$$\frac{\partial E(y_t|\theta, y_t > 0)}{\partial x_{ij}} = \beta_j \left[1 - \frac{f_s(c_t)}{1 - F_s(c_t)} E(y_t|y_t > 0) \right], \quad (6)$$

$$\frac{\partial E(y_t|\theta)}{\partial x_{ij}} = \beta_j [1 - F_s(c_t)]. \quad (7)$$

Przy szczegółowej interpretacji efektu krańcowego użyteczna będzie dekompozycja McDonalda i Moffitta [1980]. Zauważyli oni, że na całkowitą zmianę wartości y_t , określoną formułą (7), składają się dwa składniki. Pierwszy wyraża zmiany wartości y_t powyżej progu ($y_t > 0$) ważone prawdopodobieństwem zaobserwowania tych wartości, drugi zaś informuje o zmianach prawdopodobieństwa wystąpienia obserwacji $y_t > 0$ spowodowanych zmianą x_{ij} ważonych wartością oczekiwaną dla $y_t > 0$. Powyższa dekompozycja ma postać

$$\frac{\partial E(y_t)}{\partial x_{ij}} = \frac{\partial E(y_t|y_t > 0)}{\partial x_{ij}} \Pr(y_t > 0) + \frac{\partial \Pr(y_t > 0)}{\partial x_{ij}} E(y_t|y_t > 0), \quad (8)$$

gdzie $\Pr(y_t > 0) = 1 - F_s(c_t)$. Zatem udział wpływu zmian wartości y_t powyżej progu ważonych prawdopodobieństwem wystąpienia obserwacji powyżej progu, $\Pr(y_t > 0)$, w zmianach całkowitych y_t jest równy

³ Podobne wnioski na podstawie badań symulacyjnych sformułowali Arabmazar i Schmidt [1982].

$$\forall_{j=1,\dots,k} \frac{\partial E(y_i | y_i > 0)}{\partial x_{ij}} \Pr(y_i > 0) \Big/ \frac{\partial E(y_i)}{\partial x_{ij}} = 1 - \frac{f_s(c_i)}{1 - F_s(c_i)} E(y_i | y_i > 0). \quad (9)$$

Zauważmy, że w równaniu (1) z_i jest liniową funkcją zmiennych egzogenicznych x_{ij} (dla $j=1,\dots,k$). Powoduje to, że efekty krańcowe (6) i (7) względem x_{ij} przyjmują dla każdej obserwacji identyczny znak odpowiadający znakowi j -tego parametru. Ponadto udział wpływu zmian wartości y_i powyżej progu ($y_i > 0$) w zmianach całkowitych y_i , dany wzorem (9), jest identyczny dla każdej zmiennej objaśniającej. Jednym z prostszych sposobów na uwolnienie się od tego założenia jest przyjęcie, iż z_i jest kwadratową funkcją zmiennych x_{ij} . Wówczas z_i jest wciąż liniową funkcją β , co ułatwia estymację tego modelu. Takie rozszerzenie będzie przedmiotem dalszych badań autora.

Na gruncie bayesowskim ogólne zasady konstrukcji modelu statystycznego sprowadzają się do określenia łącznego rozkładu prawdopodobieństwa wektora obserwacji y i parametrów θ (oraz innych wielkości nieobserwowalnych), $p(y, \theta) = p(y | \theta) \cdot p(\theta)$, jako iloczynu rozkładu warunkowego dla y i brzegowego rozkładu dla parametrów, tj. rozkładu a priori. Estymacja parametrów polega na wyznaczeniu z rozkładu łącznego $p(y, \theta)$ warunkowej gęstości dla wektora parametrów θ , przy zaobserwowanym wektorze y , czyli funkcji gęstości tzw. rozkładu a posteriori postaci

$$p(\theta | y) = \frac{p(y, \theta)}{p(y)} = \frac{p(y | \theta) \cdot p(\theta)}{\int_{\Theta} p(y | \theta) \cdot p(\theta) d\theta} \propto p(y | \theta) \cdot p(\theta). \quad (10)$$

Łączna uogólniona funkcja gęstości T -wymiarowego wektora obserwacji $y = (y_1, \dots, y_T)'$ jest iloczynem gęstości t Studenta i dystrybuanty tego rozkładu

$$p(y | \theta) = \prod_{t: y_t=0} F_s(-x_t \beta | \theta) \cdot \prod_{t: y_t>0} f_s(y_t | x_t \beta, \nu, \tau). \quad (11)$$

Podejście bayesowskie wymaga określenia rozkładu a priori na przestrzeni nieznanymi parametrów $(\beta' \nu \tau)' \in R^k \times R^+ \times R^+$. W tym modelu dogodnie jest dla β i τ przyjąć nieinformacyjny rozkład a priori postaci $p(\beta, \tau) = p(\beta) \cdot p(\tau) \propto (\tau)^{-1}$. Odpowiada on przyjęciu reguły Jeffreysa w modelu dla obserwacji powyżej progu ($t \in \{T_0+1, \dots, T\}$), przy dodatkowym założeniu rozkładu normalnego; zob. także Chib [1992]. Bezpośrednie zastosowanie reguły Jeffreysa nie jest możliwe. W efekcie rozkładu a priori dla obu parametrów są rozkładami niewłaściwymi. Natomiast dla parametru ν przyjęto rozkład informacyjny, tj. rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej i odchyleniu standardowym równym r , gdzie r jest stałą określaną przez badacza, np. $r = 10$, zob. także Albert i Chib [1993], Osiewalski i Marzec [2004]. Jednakże wygodnie jest ze względów numerycznych wprowadzić taką parametryzację, aby zbiory dopuszczalnych wartości dla wszystkich parametrów były zbiorami liczb rzeczywistych. Przyjęcie parametryzacji $\theta = [\beta' \theta_{k+1} \theta_{k+2}]$, gdzie $\theta_{k+1} = \ln(\tau)$ zaś $\theta_{k+2} = \ln(\nu/r)$, prowadzi do rozkładu Gumbela dla θ_{k+2} (zob. Osiewalski i Marzec [2004]) oraz niewłaściwego rozkładu $p(\beta, \theta_{k+1}) \propto const$ dla pozostałych parametrów.

Następnie, korzystając z wzoru Bayesa, gęstość łącznego rozkładu a posteriori możemy zapisać następująco

$$p(\theta | y) \propto p(\theta) \cdot \prod_{t: y_t=0} F_s(-x_t \beta | \theta) \cdot \prod_{t: y_t>0} \left[B\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\tau}{\nu}\right)^{0.5} \cdot \left(1 + \frac{\tau}{\nu}(y_t - x_t \beta)^2\right)^{-0.5(\nu+1)} \right], \quad (12)$$

gdzie $p(\theta) \propto \exp(\theta_{k+2}) \cdot \exp(-\exp(\theta_{k+2}))$.

Skomplikowana struktura jądra gęstości (12) nie pozwala na analityczne wyznaczenie postaci rozkładu a posteriori bądź podstawowych momentów tego rozkładu, zarówno dla oryginalnych parametrów, jak i innych interesujących wielkości np. wartości oczekiwanych zmiennej y_i czy efektów krańcowych. W tego typu zagadnieniach zastosowanie mają metody Monte Carlo, które stosując pewien mechanizm losowania z przestrzeni parametrów, umożliwiają uzyskanie próbki z rozkładu a posteriori. W tym przypadku, podobnie jak w pracy Osiewalski i Marzec [2004], wykorzystano algorytm Metropolisa i Hastingsa. Szczegółowe

omówienie tych technik numerycznych można znaleźć w pracach O'Hagan [1994], Tierney [1994], Geweke [1996], Gamerman [1997], Pajor [2003].

Istotą algorytmu Metropolisa i Hastingsa jest wykorzystanie gęstości pomocniczej $q(\theta^*; \theta^{(i-1)})$, wg której generujemy tzw. wartości wstępne, które zaś po filtracji funkcją akceptacji tworzą łańcuch Markowa $(\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(i)}, \dots)$. Rozkładem stacjonarnym tego łańcucha jest rozkład a posteriori $p(\theta|y)$. Zapis $q(\theta^*; \theta^{(i-1)})$ przedstawia funkcję gęstości zmiennej losowej θ^* o wektorze parametrów $\theta^{(i-1)}$. Niech $\pi(\theta|y)$ oznacza jądro gęstości a posteriori $p(\theta|y)$, czyli prawą stronę wzoru (12). Algorytm Metropolisa i Hastingsa składa się z następujących kroków:

1. Przyjmujemy arbitralnie wektor wartości początkowych $\theta^{(0)}$ oraz $i=1$.
2. Generujemy θ^* z rozkładu $q(\theta^*; \theta^{(i-1)})$, zaś u z rozkładu jednostajnego $U(0;1)$.
3. Jeżeli $\alpha(\theta^*; \theta^{(i-1)}) \geq u$, to $\theta^{(i)} = \theta^*$ albo $\theta^{(i)} = \theta^{(i-1)}$ w przeciwnym przypadku, gdzie prawdopodobieństwo akceptacji wylosowanego wstępnie θ^* , czyli tzw. funkcja akceptacji wyraża się formułą

$$\alpha(\theta^*, \theta^{(i-1)}) = \min \left\{ \frac{\pi(\theta^*|y) \cdot q(\theta^{(i-1)}; \theta^*)}{\pi(\theta^{(i-1)}|y) \cdot q(\theta^*; \theta^{(i-1)})}, 1 \right\}. \quad (13)$$

4. Powtarzamy pkt. 2 i 3, przy czym $i = i + 1$.

W naszym przypadku $q(\theta^*; \theta^{(i-1)}) = f_s(\theta^* | \theta^{(i-1)}, 3, 3C^{-1})$, czyli za gęstość rozkładu losowań wstępnych przyjęto wielowymiarowy rozkład t Studenta o 3 stopniach swobody, modalnej równej poprzedniemu stanowi łańcucha oraz macierzy precyzji $3 \cdot C^{-1}$ takiej, że C jest macierzą kowariancji (równą wstępnej ocenie macierzy kowariancji rozkładu a posteriori). Zauważmy, że tak sparametryzowana gęstość $q()$ jest symetryczna względem modalnej i wektora θ^* , więc prawdopodobieństwo akceptacji zależy jedynie od ilorazu gęstości a posteriori

$$\alpha(\theta^*, \theta^{(i-1)}) = \min \left\{ \frac{\pi(\theta^*|y)}{\pi(\theta^{(i-1)}|y)}, 1 \right\}. \quad (14)$$

Funkcja akceptacji postaci (14) była użyta w oryginalnej wersji algorytmu Metropolisa z 1953 roku. W praktyce, po wykonaniu dostatecznej liczby cykli wstępnych (n_0) gwarantujących uzyskanie zbieżności procedury, otrzymujemy próbę z interesujących nas rozkładów a posteriori $\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n)}$. Na jej podstawie liczymy podstawowe charakterystyki tych rozkładów jak np. wartości oczekiwane i odchylenia standardowe a posteriori dla poszczególnych parametrów (θ) lub ich funkcji $g(\theta)$, wg formuł

$$E[g(\theta)|y] \approx \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n g(\theta^{(h)}) = \bar{\mu}_n \quad \text{zaś} \quad D[g(\theta)|y] \approx \sqrt{E[g(\theta)^2|y] - (\bar{\mu}_n)^2} = \bar{\sigma}_n. \quad (15)$$

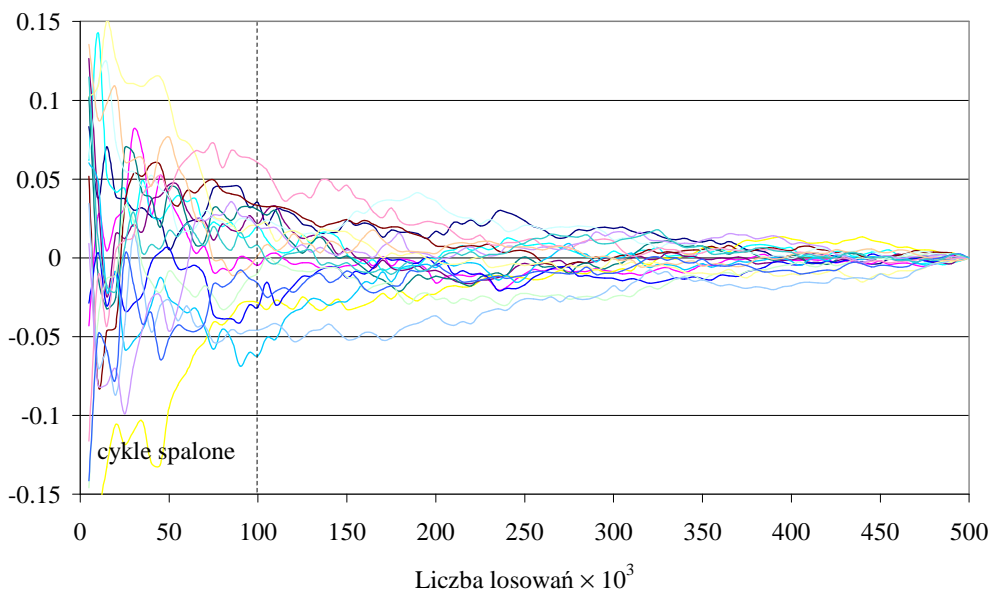
Podstawowym problemem związanym z wykorzystaniem metod Monte Carlo jest ocena zbieżności stosowanego algorytmu. Zgodnie z intuicją, stabilizacja w kolejnych cyklach wartości oczekiwanych i odchyłeń standardowych a posteriori po odrzuceniu odpowiedniej liczby początkowych losowań, wskazuje na osiągnięcie zbieżności stosowanej metody. Problem badania zbieżności przedstawiony jest m.in. w pracach Cowles, Carlin [1996] i Gamerman [1997]. W niniejszym artykule wykorzystujemy wartości standaryzowanych statystyk $CuSum_i$

$$CuSum_i = \frac{\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_n}{\bar{\sigma}_n} \quad \text{dla} \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{gdzie} \quad \bar{\mu}_i = \frac{1}{i} \sum_{h=1}^i g(\theta^{(h)}), \quad (16)$$

które pozwalają na graficzne monitorowanie zbieżności różnych łańcuchów. Jeżeli wartości $CuSum_i$ oscylują w paśmie $(-\delta; \delta)$ dla każdego $i > n_0$, wówczas przyjmuje się, że procedura jest zbieżna po n_0 cyklach spalonych, z względnym błędem równym $\delta \cdot 100\%$, gdzie np. $\delta = 0,05$ lub $0,1$. Rysunek 1 przedstawia szybkość zbieżności generowanych łańcuchów dla składowych wektora θ oraz dla przeciętnych wartości $E(y_t | \theta, y_t > 0)$ i $E(y_t | \theta)$. Obserwujemy, iż dla $\delta = 0,05$ zbieżność skumulowanych sum następuje po około

100 tys. cykli. Wcześniej wykonano milion losowań w celu oszacowania macierzy precyzji gęstości pomocniczej $q(\cdot)$. Stosując przedstawiony mechanizm losowania, ponad 22% spośród 400 tys. losowań kandydackich z gęstości $q(\cdot)$ tworzy łańcuch Markowa, na podstawie którego uzyskano wyniki a posteriori, prezentowane w następnym części artykułu.

Rysunek 1. Badanie zbieżności za pomocą statystyk $CuSum_i$.



źródło: obliczenia własne.

4. Wyniki estymacji

Omówiony powyżej bayesowski model tobitowy z symetrycznym rozkładem t Studenta wykorzystano do badania stopnia spłacalności kredytów detalicznych udzielonych przez pewien polski bank komercyjny. Wcześniej te dane zostały częściowo wykorzystane w pracach Marzec (2003a,b,c,d,e) oraz Osiewalski i Marzec (2004) w przypadku modeli dwumianowych i modelu wielomianowego dla kategorii uporządkowanych.

Na potrzeby modelu tobitowego przyjęliśmy, iż zmienna endogeniczna reprezentuje okres opóźnienia spłaty rat kapitałowo–odsetkowych przez kredytobiorców, jaki zaobserwowano na dzień 30.09.2002 r. Wielkość opóźnień wyraziliśmy w dniach, zaś przedmiotem badania objęliśmy grupę 39040 kredytów udzielonych w okresie 01.01.2000–30.09.2001. Okres opóźnienia definiujemy jako różnicę między datą 30.09.2002 r. a ustaloną w harmonogramie spłaty kredytu datą ostatniej niespłaconej w całości raty kapitałowo–odsetkowej. W przypadku kredytów spłaconych w całości przyjęliśmy, że opóźnienie wynosi zero. Zatem wartość progowa dla zmiennej endogenicznej równa jest zero.

Jako potencjalne zmienne wyjaśniające ryzyko pojedynczej umowy kredytowej wprowadziliśmy (jak we wcześniejszych pracach):

- płeć (zmienna przyjmuje wartość 1, jeżeli klientem jest mężczyzna, 0 w przypadku kobiety),
- wiek kredytobiorcy (w setkach lat),
- wpływy, tzn. wielkość kwartalnych wpływów w latach 2000-2001 (w setkach tys. zł) na rachunki typu ROR kredytobiorcy w badanym banku,
- posiadanie rachunku ROR w analizowanym banku (1 – posiada, 0 – nie posiada),
- informację o tym, czy kredytobiorca posiada karty płatnicze lub kredytowe wydane przez ten bank (1 – posiada choć jedną kartę płatniczą, 0 – nie posiada),
- sposób udzielenia kredytu (1 – poprzez pośrednika kredytowego, 0 – bezpośrednio przez rozważany bank),

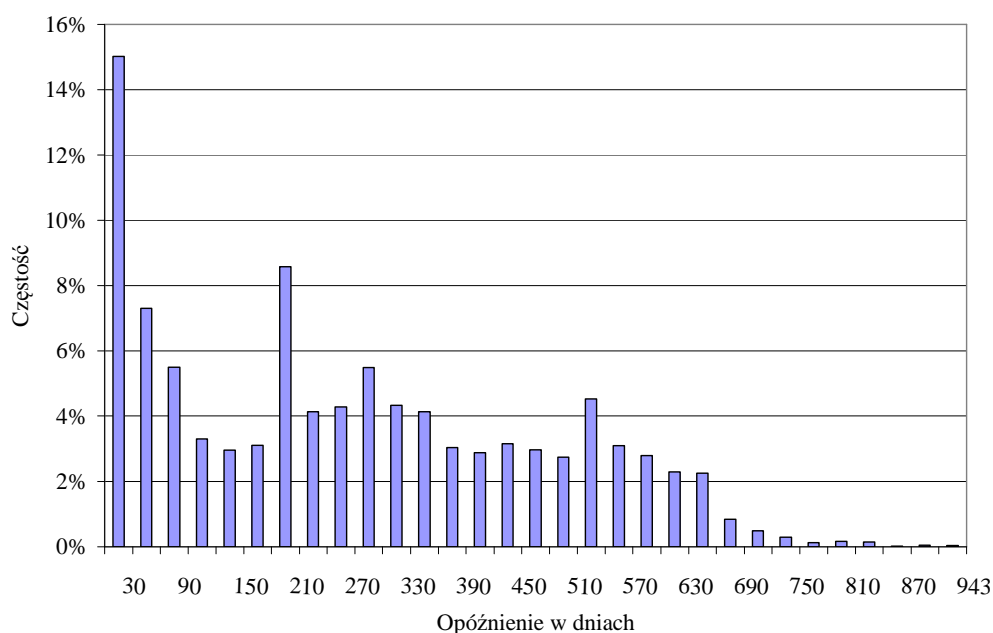
- typ kredytu (1 – kredyt konsumpcyjny, 0 – kredyt hipoteczny),
- okres trwania umowy kredytowej (w dziesiątkach lat),
- kwota przyznanego kredytu (w setkach tys. zł),
- waluta kredytu (1 – EUR, DEM lub USD, 0 – PLN),
- podstawowe źródło dochodu uzyskiwanego przez kredytobiorcę (zmienna $zrdoch$), tj. umowa o pracę, albo renta lub emerytura, albo własna działalność, umowa o dzieło lub umowa zlecenie, albo inne źródło (np. stypendium).

Ostatnia zmienna może przyjmować cztery różne wartości. Chcąc ją uwzględnić w równaniu regresji z wyrazem wolnym, wprowadziliśmy trzy zmienne zerojedynkowe, przy czym za kategorię referencyjną przyjęliśmy umowę o pracę ($zrdoch1 = zrdoch2 = zrdoch3 = 0$); w pozostałych przypadkach:

- $zrdoch1 = 1$, gdy źródłem dochodu kredytobiorcy jest renta lub emerytura,
- $zrdoch2 = 1$, gdy źródłem dochodu kredytobiorcy jest własna działalność, umowa o dzieło lub umowa zlecenie,
- $zrdoch3 = 1$ w przypadku innego źródła dochodu, np. stypendium.

Liczba kredytów, które na dzień 30.09.2002 r. były spłacane w terminie ($y_t = 0$) wynosiła 28527, więc udział obserwacji powyżej progu ($y_t > 0$) wynosi prawie 27%. Przeciętna zaobserwowana długość opóźnienia spłaty kredytu pod warunkiem, że wynosi przynajmniej jeden dzień, wynosi 267 dni, przy odchyleniu standardowym równym 203 dni. Rysunek 2 prezentuje ilościowy udział kredytów ze względu na czas opóźnienia w spłacie rat kapitałowo-odsetkowych, gdy to opóźnienie wynosi nie mniej niż jeden dzień.

Rysunek 2. Częstość obserwacji zmiennej y_t powyżej progu ($y_t > 0$).



źródło: obliczenia własne.

W dalszej części pracy prezentowane będą bayesowskie wyniki a posteriori zarówno dla podstawowego modelu, tj. specyfikacji z rozkładem t Studenta, jak i najczęściej stosowanego standardowego modelu tobitowego.⁴ Szczegółowo omówione zostaną wyniki tego pierwszego modelu. Tabela 1 zawiera wartości oczekiwane i odchylenia standardowe a posteriori dla parametrów obu modeli.

Z punktu widzenia potrzeby uzasadnienia modelu t Studenta, najbardziej interesującym parametrem jest liczba stopni swobody ν . Wartość oczekiwana a posteriori dla tego parametru wynosi prawie 9,4 przy niewielkim odchyleniu standardowym rzędu 0,6. Zatem w badanym przypadku wprowadzenie tego

⁴ Istnieje równoważność wyników bayesowskich i ocen MNW w standardowym modelu (1), ponieważ te ostatnie, w przypadku tak dużej liczby obserwacji, można traktować jako aproksymację wartości oczekiwanych rozkładu a posteriori parametrów tego modelu.

uogólnienia jest uzasadnione, zaś opieranie się na wynikach standardowego modelu tobitowego może prowadzić do błędnych wniosków. Prezentowane w tabelach wyniki a posteriori uzyskano dla $r = 10$, co oznacza, że rozkład a priori dla ν charakteryzuje się wartością oczekiwaną i odchyleniem standardowym równym także 10. Można taki rozkład a priori uznać za mało informacyjny. Przyjmując za $r = 40$ otrzymaliśmy wartość oczekiwaną a posteriori dla ν równą 9,409 ($\pm 0,579$) i statystycznie nie różni się istotnie od wartości uzyskanej dla $r = 10$. Zatem otrzymane wyniki nie są wrażliwe na dobór parametru r charakteryzującego rozkład a priori dla ν , zaś dane wyraźnie opowiadają się za modelem z rozkładem t Studenta.

Tabela 1. Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe a posteriori parametrów modelu tobitowego z rozkładem t Studenta; $\varepsilon_i \sim \text{St}(0, \tau, \nu)$, zał. $r = 10$.

Zmienna (parametr)	$\varepsilon_i \sim \text{St}(0, \tau, \nu)$		$\varepsilon_i \sim \text{St}(0, \tau, \nu = +\infty)$	
	E(y)	D(y)	E(y)	D(y)
Stała	-412,396	29,636	-435,121	23,311
Płeć	7,065	4,921	12,001	4,954
Wiek	-190,029	23,486	-195,037	23,367
Wpływy	-170,367	32,881	-160,463	22,891
ROR	-119,116	11,487	-111,321	10,464
Karty	-19,987	10,079	-30,462	8,713
Pośrednik	449,132	9,855	438,386	9,560
Typ Kredytu	85,295	25,479	109,508	18,522
Okres kredytu	138,663	13,452	132,047	11,349
Kwota	27,047	6,756	28,895	5,884
Waluta	1,870	29,111	7,996	25,293
Zrdoch1	-33,906	7,979	-35,628	8,051
Zrdoch2	77,742	11,445	90,063	10,968
Zrdoch3	-82,376	21,137	-92,476	20,679
τ	0,0000114	0,0000002	0,0000087	0,0000001
ν	9,399	0,578	–	–

źródło: obliczenia własne.

W celu wnioskowania o zmiennej endogenicznej y_t , reprezentującej opóźnienie spłaty rat kapitałowo-odsetkowych w dniach, obliczyliśmy jej warunkowe i bezwarunkowe wartości oczekiwane. Dla uproszczenia Tabela 2 prezentuje spodziewane opóźnienie spłaty kredytu dla przeciętnego kredytobiorcy, które obliczyliśmy jako średnią arytmetyczną opóźnień dla wszystkich kredytobiorców. Na podstawie modelu t Studenta wnioskujemy, iż spodziewane przeciętne opóźnienie w spłacie kredytu, bez względu na przebieg spłaty, wynosi 72,5 dnia, czyli ponad 2 miesiące. Natomiast, jeżeli klient opóźniałby spłatę rat kapitałowo-odsetkowych, to spodziewamy się, iż to opóźnienie wyniesie 222,5 dnia, czyli ponad 7 miesięcy. Przypomnijmy, że zgodnie z uchwałami Komisji Nadzoru Bankowego, gdy opóźnienie w spłacie rat kapitałowo-odsetkowych kredytu konsumpcyjnego przekracza 6 miesięcy, to bank zobowiązany jest do tworzenia rezerw celowych w kwocie równej wartości kredytu pozostającego do spłaty (pomniejszonej o ewentualne zabezpieczenia). Zatem, z punktu widzenia zarządzania ryzykiem kredytowym w banku, interesującym zagadnieniem jest określenie siły i kierunku oddziaływania czynników egzogenicznych wpływających na kształtowanie się wielkości opóźnienia spłaty kredytu.

Tabela 2. Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe a posteriori dla przeciętnych: $E(y_t | \theta, y_t > 0)$ oraz $E(y_t | \theta)$.

Model	$\varepsilon_i \sim \text{St}(0, \tau, \nu)$		$\varepsilon_i \sim \text{St}(0, \tau, \nu = +\infty)$	
	E(y)	D(y)	E(y)	D(y)
$E(y y > 0)$	222,58	2,50	205,34	1,42
$E(y)$	72,56	0,75	72,03	0,71

źródło: obliczenia własne.

Tabele 3 i 4 przedstawiają wpływ zmian zmiennych x_{ij} na bezwarunkową i warunkową oczekiwaną wartość y_t . Z uwagi na przyjętą różniczkową definicję efektów krańcowych, szczegółowo omówimy rolę ciągłych zmiennych egzogenicznych, natomiast w przypadku zmiennych zerojedynkowych ograniczymy się do oceny jakościowej, zwracając uwagę jedynie na znak.

Wzrost wieku kredytobiorcy o 10 lat powoduje spadek bezwarunkowej wartości oczekiwanej zmiennej y_t o 5 dni i obniżenie wartości oczekiwanej niezerowych wartości y_t o ponad 3 dni. Analogicznie, wzrost kwartalnych wpływów o 10 tysięcy złotych pociąga za sobą spadek hipotetycznego opóźnienia o 4,5 dnia oraz spadek już istniejącego opóźnienia ($y_t > 0$) o 3 dni. Jeżeli zaś okres spłaty kredytu wydłużyłby się o 1 rok, to okres opóźnienia spłaty kredytu wzrósłby średnio o prawie 4 dni albo o ponad 2 dni pod warunkiem, że obserwujemy przynajmniej jednodniowe opóźnienie. Wpływ zmiany wielkości przyznanego kredytu jest także statystycznie istotny (jak pozostałych wspomnianych zmiennych), aczkolwiek z punktu widzenia zarządzania portfelem wpływ ten jest mało znaczący.

Pośród zmiennych zerojedynkowych, sprzedaż kredytu poprzez pośrednika oraz udzielenie kredytu konsumpcyjnego a nie hipotecznego, są okolicznościami powodującymi wzrost spodziewanego opóźnienia. Posiadanie rachunku ROR oraz kart płatniczych lub kredytowych zmniejsza ewentualne opóźnienie spłaty kredytu. Ponadto, udzielenie kredytu klientom prowadzącym własną działalność gospodarczą (*zrdoch2*) powoduje wzrost opóźnienia spłaty w stosunku do osób zatrudnionych na umowę o pracę. Natomiast renta i emerytura (*zrdoch2*) lub stypendium (*zrdoch2*) są źródłami dochodu charakteryzującymi się najmniejszym ryzykiem kredytowym.

Z punktu widzenia praktycznego, otrzymane wyniki dotyczące efektów krańcowych, uzyskane na podstawie obu rozważanych modeli, wydają się być podobne. Znaki i rzędy wielkości efektów krańcowych są zgodne i porównywalne. Wyraźne różnice między modelami dotyczą efektów krańcowych warunkowej wartości oczekiwanej $y_t > 0$, które przedstawia Tabela 4. Wartości bezwzględne tych efektów krańcowych w modelu *t* Studenta są mniejsze niż w modelu standardowym. Innymi słowy, w pierwszym modelu udział wpływu zmian wartości $y_t > 0$ (spowodowanych zmianami x_{ij}) ważonych prawdopodobieństwem wystąpienia obserwacji powyżej progu w zmianach całkowitych y_t wynosi 17%, zaś w drugim modelu jest on większy i kształtuje się na poziomie 25%.

Tabela 3. Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe a posteriori uśrednionych efektów krańcowych:

$$T^{-1} \sum_t \partial E(y_t) / \partial x_{ij}$$

Model	$\varepsilon_t \sim \text{St}(0, \tau, \nu)$		$\varepsilon_t \sim \text{St}(0, \tau, \nu = +\infty)$	
	E(y)	D(y)	E(y)	D(y)
Płeć	1,89	0,84	3,17	1,24
Wiek	-50,75	4,17	-51,53	5,84
Wpływy	-45,50	5,69	-42,40	5,72
ROR	-31,81	2,04	-29,41	2,61
Karty	-5,34	1,73	-8,05	2,17
Pośrednik	119,95	2,93	115,82	2,39
Typ Kredytu	22,78	4,39	28,93	4,62
Okres kredytu	37,03	2,39	34,89	2,83
Kwota	7,22	1,17	7,63	1,47
Waluta	0,50	4,98	2,11	6,31
Zrdoch1	-9,05	1,38	-9,41	2,01
Zrdoch2	20,76	2,02	23,79	2,74
Zrdoch3	-22,00	3,64	-24,43	5,16

źródło: obliczenia własne.

Tabela 4. Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe a posteriori uśrednionych efektów krańcowych:

$$T^{-1} \sum_t \partial E(y_t | \theta, y_t > 0) / \partial x_{ij}$$

Model	$\varepsilon_t \sim \text{St}(0, \tau, \nu)$		$\varepsilon_t \sim \text{St}(0, \tau, \nu = +\infty)$	
	E(y)	D(y)	E(y)	D(y)
Płeć	1,21	1,31	3,00	1,31
Wiek	-32,47	6,27	-48,69	6,18
Wpływy	-29,11	8,78	-40,06	6,06
ROR	-20,35	3,07	-27,79	2,76
Karty	-3,42	2,69	-7,60	2,30
Pośrednik	76,74	2,64	109,43	2,56
Typ Kredytu	14,58	6,80	27,34	4,89
Okres kredytu	23,69	3,59	32,96	2,99
Kwota	4,62	1,80	7,21	1,55
Waluta	0,32	7,77	2,00	6,68
Zrdoch1	-5,79	2,13	-8,89	2,13
Zrdoch2	13,29	3,05	22,48	2,90
Zrdoch3	-14,08	5,64	-23,08	5,46

źródło: obliczenia własne.

Innym sposobem praktycznego wykorzystania modelu tobitowego jest prognozowanie okresu opóźnienia spłaty kredytu dla wybranych klientów. Rozważmy cztery hipotetyczne sylwetki kredytobiorców: dwóch o cechach najczęstszych (dotyczy zmiennych jakościowych) lub przeciętnych (dla zmiennych ciągłych) w badanej zbiorowości, różniących się jedynie sposobem udzielenia kredytu konsumpcyjnego oraz dwóch innych o cechach tak przeciwstawnie skonstruowanych, że charakteryzują się oni najmniejszym i największym ryzykiem kredytowym.⁵ W przypadku typowego kredytobiorcy udzielenie mu kredytu poprzez pośrednika zamiast bezpośrednio przez bank skutkuje wzrostem oczekiwanego opóźnienia z 12 do 108 dni, czyli o 96 dni (trzy miesiące). Pojawienie się jakichkolwiek problemów ze spłatą kredytu ($y_t > 0$) oznacza, że nawet w sytuacji udzielenia kredytu bezpośrednio w banku opóźnienie wyniesie aż 182 dni (6 miesięcy) i będzie jeszcze wyższe (o 42 dni), gdy kredyt sprzedany zostanie z pomocą pośrednika. W przypadku młodych klientów prowadzących działalność gospodarczą, którzy biorąc kredyt konsumpcyjny nie posiadają kart płatniczych ani rachunku ROR, spodziewane opóźnienie spłaty kredytu wynosi prawie 259 dni, a w sytuacji, gdy pojawiają się problemy z jego spłatą ($y_t > 0$) wzrasta ono do 346 dni. Spośród wybranych kredytobiorców najmniejszym ryzykiem charakteryzuje się sześćdziesięcioletnia klientka banku, utrzymująca się z emerytury i korzystająca z szerokiej oferty produktów banku, która spłaca kredyt hipoteczny. Aczkolwiek w sytuacji, gdy zarówno ona jak i typowy kredytobiorca spłacają nieregularnie raty kredytowo-odsetkowe, spodziewamy się około półrocznego opóźnienia w spłacie, co powoduje, że bank jest zobowiązany do tworzenia 100% rezerw od należności przeterminowanych.

Tabela 5. Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe a posteriori dla $E(y_t | \theta)$ w przypadku wybranych klientów.

Model	$\varepsilon_t \sim \text{St}(0, \tau, \nu)$		$\varepsilon_t \sim \text{St}(0, \tau, \nu = +\infty)$	
	E(y)	D(y)	E(y)	D(y)
Kredytobiorca				
Typowy (pośrednik = 1)	107,98	5,19	114,37	4,97
Typowy (pośrednik = 0)	11,76	0,57	11,77	0,58
Młody biznesmen	258,68	9,22	266,38	8,78
Starsza pani	4,69	0,69	2,55	0,42

źródło: obliczenia własne.

⁵ Szczegółowa charakterystyka hipotetycznych kredytobiorców przedstawiona została w innych pracach, zob. Marzec (2003c,e) oraz Osiewalski i Marzec (2004).

Tabela 6. Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe a posteriori dla $E(y_i | \theta, y_i > 0)$ w przypadku wybranych klientów.

Model	$\varepsilon_i \sim \text{St}(0, \tau, \nu)$		$\varepsilon_i \sim \text{St}(0, \tau, \nu = +\infty)$	
	E(y)	D(y)	E(y)	D(y)
Kredytobiorca				
Typowy (pośrednik = 1)	244,30	3,76	254,80	4,01
Typowy (pośrednik = 0)	182,43	3,23	152,39	1,61
Młody biznesmen	345,76	6,89	362,89	6,49
Starsza pani	180,81	4,54	124,47	2,41

źródło: obliczenia własne.

5. Podsumowanie

W niniejszym artykule zaprezentowano specyfikację i bayesowską estymację modelu tobitowego z rozkładem t Studenta, będącego uogólnieniem najczęściej stosowanego w praktyce standardowego modelu z rozkładem normalnym. W ramach podejścia bayesowskiego zastosowana metoda numeryczna, tj. algorytm Metropolisa i Hastingsa, okazała się skutecznym narzędziem umożliwiającym uzyskanie próbek z rozkładu a posteriori. Omówione analiza bayesowska jest szczególnie polecana w przypadku skończonych prób z uwagi na małopróbkowy charakter tego podejścia, natomiast estymator MNW ma własności asymptotyczne, które udowodniono jedynie dla standardowego modelu tobitowego.

Wyniki empiryczne wyraźnie wskazują na model t Studenta z dziewięcioma stopniami swobody, a zatem zastosowanie tego uogólnienia wydaje się być istotne z punktu widzenia wnioskowania statystycznego.

Natomiast z punktu widzenia zarządzania ryzykiem kredytowym, uzyskano nowe i interesujące rezultaty. Stanowią one uzupełnienie wyników, prezentowanych we wcześniejszych pracach autora, a uzyskanych na podstawie modeli dla danych jakościowych, dwumianowych i wielomianowych. Zaprezentowane w poprzednim rozdziale wyniki zawierają m.in. informacje o spodziewanym opóźnieniu spłaty kredytu przez wybranych kredytobiorców oraz informacje o sile i kierunku oddziaływania wybranych czynników egzogenicznych na badaną wielkość opóźnienia. Wiek kredytobiorcy i jego wpływy na rachunek ROR są tymi czynnikami, których wzrost powoduje skrócenie okresu opóźnienia spłaty kredytu. Innymi czynnikami pozytywnie wpływającymi na spłatę kredytu jest posiadanie przez klienta kart płatniczych lub kredytowych lub rachunku ROR. Natomiast im większa kwota kredytu lub im dłuższy okres, na jaki został udzielony kredyt, tym można się spodziewać dłuższego opóźnienia jego spłaty. Udzielenie kredytu konsumpcyjnego (a nie hipotecznego) lub udzielenie go poprzez pośrednika (a nie bezpośrednio przez bank) zwiększają ewentualne ryzyko kredytowe związane z niedotrzymaniem przez kredytobiorcę ustalonych w umowie kredytowej terminów spłat poszczególnych rat kapitałowo-odsetkowych.

Bibliografia

- Albert J., S. Chib [1993], Bayesian Analysis of Binary and Polychotomous Response Data, *Journal of the American Statistical Association*, vol. 88, s. 669-679.
- Amemiya T. [1973], Regression Analysis when the Dependent Variable is Truncated Normal, *Econometrica*, vol. 41, nr 6, s. 997-1016.
- Amemiya T. [1985], *Advanced Econometrics*, Harvard University Press, Cambridge Massachusetts.
- Arabmazar A., P. Schmidt [1982], An Investigation of the Robustness of the Tobit Estimator to Non-Normality, *Econometrica*, vol. 50, nr 4, s. 1055-1063.
- Chib S., [1992], Bayes Inference in the Tobit Censored Regression Model, *Journal of Econometrics*, 51, s. 77-99.
- Cohen A. C. [1950], Estimating the Mean and Variance of Normal Populations from Singly Truncated and Doubly Truncated Samples, *Annals of Mathematical Statistics*, 21, s. 557-569.
- Cowles M.K., B.P. Carlin [1996], Markov Chain Monte Carlo Convergence Diagnostic: A Comparative Review, *Journal of the American Statistical Association*, 91, s. 883-904.

- Gamerman D. [1997], *Markov Chain Monte Carlo. Stochastic Simulation for Bayesian Inference*, Chapman and Hall, London.
- Geweke J. [1996], *Monte Carlo Simulation and Numerical Integration*: in H. Amman, D. Kendrick and J. Rust (eds.), *Handbook of Computational Economics*, Amsterdam: North-Holland.
- Goldberger A. S. [1983], *Abnormal Selection Bias*, [in:] S. Karlin, T. Amemiya, L. Goodman, *Studies in Econometrics, Time Series, and Multivariate Statistics*, s. 67-84, New York, Academic Press.
- Gourieroux C. [2000], *Econometrics of Qualitative Dependent Variables*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Greene W. H. [1993], *Econometric Analysis*, Macmillan Publishing Company, New York.
- Gruszczyński M., [1997], *Dynamiczne modele tobitowe*, *Przegląd Statystyczny*, tom 44, nr 4, s. 499-513.
- Gruszczyński M. [2001], *Modele i prognozy zmiennych jakościowych w finansach i bankowości*, *Monografie i Opracowania SGH*, Warszawa, nr 6.
- Maddala G. S. [1983], *Limited-dependent and Qualitative Variables in Econometrics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Marzec J. [2003a], *Badanie niewypłacalności kredytobiorcy na podstawie modeli logitowych i probitowych*, *Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Krakowie*, Kraków, nr 628, s. 103-117.
- Marzec J., [2003b], *Badanie niespłacalności kredytów za pomocą bayesowskich modeli dychotomicznych - założenia i wyniki*, *Metody ilościowe w naukach ekonomicznych* (red. A. Welfe), Wydawnictwo SGH w Warszawie, s. 73-86.
- Marzec J., [2003c], *Bayesowska analiza modeli dyskretnego wyboru (dwumianowych)*, *Przegląd Statystyczny* t. 50, s. 129-146.
- Marzec, [2003d], *Modele wielomianowe dla kategorii uporządkowanych w badaniu niespłacalności kredytów konsumpcyjnych*, w: *Prognozowanie w zarządzaniu firmą* (red. P. Dittmann), *Prace Naukowe AE we Wrocławiu* nr 1001, s.143-152.
- Marzec J., [2003e], *Bayesowska analiza wielomianowego modelu probitowego dla kategorii uporządkowanych*, *Folia Oeconomica Cracoviensia*, vol. 43-44. s. 63-80.
- McDonald J.F., R. A. Moffitt [1980], *The Uses of Tobit Analysis*, *The Review of Economics and Statistics*, vol. 62, s. 318-321.
- O'Hagan A. [1994], *Bayesian Inference*, J. Wiley, New York.
- Olsen R. J. [1978], *Note on the Uniqueness of the Maximum Likelihood Estimator for the Tobit Model*, *Econometrica*, vol. 46, nr 5, s. 1211-1209.
- Osiewalski J., J. Marzec [2004], *Uogólnienie dychotomicznego modelu probitowego z wykorzystaniem skośnego rozkładu Studenta*, *maszynopis*.
- Pajor A. [2003], *Procesy zmienności stochastycznej SV w bayesowskiej analizie finansowych szeregów czasowych*, *Monografie: Prace Doktorskie*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, nr 2.
- Tierney L. [1994], *Markov chains for exploring posterior distributions (with discussion)*, *Annals of Statistics*, 22, s. 1701-1762.
- Tobin J. [1958], *Estimation of relationships for limited dependent variables*, *Econometrica*, 26, s. 24-36.