

*Jerzy Marzec*

# **Krótkookresowa analiza technologii i efektywności kosztowej oddziałów banku - praca jako czynnik stały<sup>1</sup>**

## **1. Wprowadzenie**

Z początkiem lat siedemdziesiątych poprzedniego stulecia neoklasyczna funkcja kosztu stała się bardzo popularnym narzędziem w empirycznej analizie technologii firm. Intensywny rozwój tych badań i ich atrakcyjność była spowodowana m.in. pojawieniem się tzw. giętkich form funkcyjnych (*flexible functional forms*), np. uogólnionego modelu Leontiewa (Diewert [1971]) czy funkcji translogarytmicznej (Christensen, Jorgenson i Lau [1973])<sup>2</sup>.

Funkcja kosztu ma bardzo szerokie zastosowanie jako narzędzie umożliwiające poznanie technologii firm, m.in. poprzez określenie efektu skali produkcji i badanie substytucyjności czynników produkcji. Jest ona bardzo użyteczna, bo jako forma dualna do funkcji produkcji czy transformacji umożliwia wnioskowanie o technologii w przypadku wielu produktów. Każdorazowo w konkretnych badaniach empirycznych pojawia się kwestia czynników stałych. Istnieje kilka podejść do tego problemu. W pierwszych aplikacjach wykorzystujących funkcje kosztu przyjmowało się silne założenie, że wszystkie czynniki produkcji są czynnikami zmiennymi, czyli podlegającymi optymalizacji w procesie produkcji. Oznacza ono, że obserwowane nakłady tych czynników odpowiadają zaangażowaniu optymalnemu, które minimalizuje koszt wytworzenia określonego produktu (lub wektora produktów) przy egzogenicznych (rynkowych) cenach czynników. Innymi słowy zakłada się, że nakłady wszystkich czynników produkcji osiągają swoje długookresowe optimum. W literaturze ten przypadek określa się jako tzw. model równowagi długookresowej (ang. *long-run equilibrium*) lub model pełnej równowagi statycznej (ang. *full static equilibrium*; FSE), zob. Brown, Christensen [1981].

---

<sup>1</sup> Praca wykonana w ramach projektu badawczego nr 1-H02B-022-18 Komitetu Badań Naukowych.

<sup>2</sup> Obie formy funkcyjne były już w latach sześćdziesiątych rozważane przez Headyego i Dillona, zajmujących się ekonomiką rolną.

Alternatywnie przyjmuje się<sup>3</sup>, że w procesie podejmowania decyzji przez firmę optymalizacji podlegają jedynie wybrane czynniki produkcji. Ta optymalizacja jest warunkowa względem pozostałych, ustalonych (obserwowanych) nakładów czynników, które mogą istotnie różnić się od zaangażowania optymalnego wynikającego z równowagi długookresowej. Konwencją stało się określanie tego przypadku jako modelu częściowej równowagi statycznej (*partial static equilibrium*, PSE) lub równowagi krótkookresowej (*short-run equilibrium*), w którym przedmiotem analizy jest funkcja kosztu zmiennego (*short-run/restricted/conditional/variable cost function*). Podejście to zostało zaproponowane przez Browna i Christensena [1981], a następnie zostało wykorzystane m.in. w pracach takich autorów jak: Kulatilaka [1985, 1987], Nelson [1985], Hazilla i Kopp [1986], Schankerman i Nadiri [1986], Slade [1986], Morrison [1988], Kolstand i Lee [1993], Nemoto, Nakanishi i Madono [1993], Atkinson i Halvorsen [1998], Thomsen [2000]. Czynniki produkcji określa się jako czynniki zmienne, jeżeli podlegają warunkowej optymalizacji, a pozostałe nazywa się stałymi lub quasi-stałymi. Podstawy teoretyczne mikroekonomicznej funkcji kosztu zmiennego jako szczególnego przypadku tzw. warunkowej funkcji zysku (*restricted profit function*) w sensie McFaddena można znaleźć w pracach: McFaddena [1978] lub Lau [1976].

Zatem oba modele różni podejście do czynników stałych, ponieważ podstawowym założeniem w modelu FSE (w odróżnieniu do PSE) jest przyjęcie, iż obserwowane nakłady czynników, traktowanych jako stałe w PSE, odpowiadają nakładom optymalnym minimalizującym koszt całkowity. Oczywiście sprawą otwartą pozostaje rozstrzygnięcie, który czynnik powinno się traktować jako czynnik stały, a który jako zmienny. Pewną propozycję w tej kwestii podają Atkinson i Halvorsen [1998]. Jeżeli technologia jest faktycznie w równowadze długookresowej, to optymalne zaangażowanie wszystkich czynników powinno być równe wielkości nakładów obserwowanym w krótkim okresie. To założenie powinno być przedmiotem formalnego testowania statystycznego, bo w przeciwnym przypadku wnioskowanie o podstawowych charakterystykach procesu produkcji na podstawie danych empirycznych może prowadzić do błędnych konkluzji. Propozycje wykorzystania pewnych klasycznych testów statystycznych do weryfikacji tego założenia na podstawie modelu PSE proponują m.in. Kulatilaka [1985], [1987], Schankerman i Nadiri [1986], Kolstand i Lee [1993], Nemoto, Nakanishi i Madono [1993].

Innym ze sposobów wykorzystania funkcji kosztu jest analiza efektywności kosztowej (ang. *cost efficiency*), rozumianej jako iloraz minimalnego kosztu (niezbędnego do wytworzenia danej wielkości produkcji przy danych cenach czynników) i kosztu rzeczywiście poniesionego.<sup>4</sup> Zatem o nieefektywności kosztowej mówimy, jeżeli firma

---

<sup>3</sup> Istnieje jeszcze trzecie podejście do kwestii czynników stałych, wykorzystujące tzw. dynamiczne modele równowagi, zob. Morrison i Berndt [1981].

<sup>4</sup> Przyczyny niepełnej efektywności (nieefektywności) kosztowej mogą być dwie: nieefektywność alokacyjna, jeśli czynniki są angażowane w proporcjach różnych od relacji ich cen rynkowych, bądź nieefektywność techniczna, która ma miejsce, gdy dochodzi do marnotrawienia czynników produkcji (określoną wielkość produkcji można uzyskać poprzez proporcjonalną redukcję nakładów lub z ustalonych

przy ustalonych cenach czynników produkcji ponosi większy koszt wytworzenia określonego poziomu produkcji niż wynika on z mikroekonomicznej (granicznej) funkcji kosztu. Podstawy obecnie stosowanej ekonometrycznej metodologii badania efektywności kosztowej stworzyli Aigner, Lovell i Schmidt oraz Meeusen i van den Broeck, którzy w 1977 roku zaproponowali tzw. stochastyczne modele graniczne (ang. *stochastic frontier models*). Składają się one z odpowiednio wyspecyfikowanej mikroekonomicznej funkcji kosztów (dla logarytmów tych zmiennych) oraz dwóch składników losowych, z których jeden (symetryczny względem zera) odzwierciedla wpływ czynników przypadkowych i błędów pomiaru, zaś drugi (asymetryczny i stałego znaku) modeluje potencjalną nieefektywność. Dalszego rozwoju tej metodologii, prezentowanej głównie na łamach *Journal of Econometrics*, dokonali m. in. Stevenson [1980], Pitt i Lee [1981], Jondrow, Lovell, Materov i Schmidt [1982], Schmidt i Sickles [1984], Beckers i Hammond [1987], Greene [1980], [1990], a także van den Broeck, Koop, Osiewalski i Steel [1994], Koop, Osiewalski i Steel [1997] oraz Fernández, Osiewalski i Steel [1997], którzy zaproponowali podejście bayesowskie dające bardzo wyrafinowane i skuteczne narzędzia estymacji tej niestandardowej klasy modeli.

W niniejszym opracowaniu autor zaprezentuje podstawy mikroekonomiczne modelu PSE, a następnie przedstawi wyniki bayesowskiej estymacji stochastycznego modelu granicznego dla krótkookresowej funkcji kosztu zmiennego. Z uwagi na fakt, że wykorzystywane do estymacji dane pochodzące z 58 oddziałów polskiego banku komercyjnego i obejmują cztery kwartały jednego roku (1997) przyjęto, że w tym horyzoncie czasowym pracę i nieruchomości można traktować jako czynniki stałe.<sup>5</sup> Zatem głównym celem niniejszego opracowania jest przedstawienie testowania modelu PSE w ramach bayesowskiego stochastycznego modelu granicznego. Pozwoli to na uzyskanie ciekawych wyników empirycznych, które informują o ekonomicznej roli pracy jako czynnika produkcji i jej wpływie na efektywność oddziałów.

## 2. Model częściowej równowagi statycznej (PSE)

Na początku założymy, że firma wytwarza wektor produktów  $Q$  angażując  $H+P$  czynników produkcji o ustalonych, rynkowych cenach. Niech  $P$  czynników ma charakter stałych czynników produkcji, zatem technologia niekoniecznie znajduje się w równowadze długookresowej, bo obserwowane zaangażowanie choć jednego z tych czynników może

---

nakładów można uzyskać większą produkcję od obserwowanej, zob. Atkinson i Cornwell [1994] lub Marzec i Osiewalski [1996-1997], Osiewalski [2001].

<sup>5</sup> W wcześniejszych pracach prezentowano wyniki uzyskane m.in. przy założeniu, że jedynie nieruchomości mają charakter czynnika stałego (zob. Marzec i Osiewalski [1996-97, 2001], Marzec [1998a, 1998b, 1999, 2000, 2001], Osiewalski i Marzec [1998a, 1998b, 1998c]). W wielu dyskusjach sugerowano, że praca w horyzoncie czterech kwartałów powinna być traktowana jako czynnik stały.

być istotnie różne od nakładu optymalnego. W tej sytuacji PSE wydaje się odpowiednim modelem teoretycznym, który opisuje technologię firmy. Niech  $T(x, k, Q)$  oznacza funkcję transformacji [por. Varian [1992]), a wektory  $x=[x_1...x_H]$  i  $k=[k_1...k_P]$  nakłady odpowiednio zmiennych i stałych czynników produkcji, natomiast  $w=[w_1...w_H]$  i  $l=[l_1...l_P]$  oznaczają ich (dodatnie) ceny rynkowe. Jeżeli funkcja  $F(\cdot)$  spełnia odpowiednie warunki regularności (por. np. Lau [1976]), a firma minimalizuje koszt zmienny wytworzenia wielkości produkcji  $Q$ , przy ustalonym zaangażowaniu czynników stałych ( $k$ ) i przy ustalonych cenach czynników zmiennych ( $w$ ), to istnieje krótkookresowa funkcja kosztu zmiennego (*short-run variable cost*) postaci

$$VC \equiv \min_x \{x \cdot w' \mid T(x, k, Q) = 0\} \equiv VC(w, Q, k). \quad (1)$$

Zatem  $VC$  jest funkcją wielkości produkcji, cen czynników zmiennych oraz nakładów czynników stałych. Opisuje ona technologię firmy w krótkim okresie czasu, w sytuacji równowagi krótkookresowej, gdy optymalizacja zmiennych czynników produkcji jest warunkowa względem nakładów czynników stałych, które nie muszą być na poziomie optymalnym. W przeciwnym przypadku model PSE byłby równoważny FSE.

Zgodnie z mikroekonomiczną teorią firm krótkookresowa funkcja kosztu zmiennego jest niemalejąca, jednorodna stopnia jeden i wklęsła ze względu na ceny czynników zmiennych, niemalejąca ze względu na wielkości produktów, nierosnąca i wypukła ze względu na nakłady czynników stałych. Ponadto macierze drugich pochodnych cząstkowych funkcji  $VC$  względem cen czynników zmiennych i nakładów czynników stałych są macierzami symetrycznymi (por. McFadden [1978], Browning [1983]). Wszystkie te własności mogą być sformułowane w kategoriach pochodnych funkcji kosztu, co przedstawia poniższa tabela.

Tabela 1. Teoretyczne własności krótkookresowej funkcji kosztu zmiennego ( $VC$ ).

własność	opis	warunek
1	niemalejąca ze względu na ceny $w_h$	$\partial VC / \partial w_h \geq 0$ dla $h=1, \dots, H$
2	nierosnąca ze względu na nakłady $k_p$	$\partial VC / \partial k_p \leq 0$ dla $p=1, \dots, P$
3	niemalejąca ze względu na $Q_h$	$\partial VC / \partial Q_g \geq 0$ dla $g=1, \dots, G$
4	jednorodna stopnia 1 ze względu na $w_h$	$\sum_h (\partial \ln VC / \partial \ln w_h) = 1$
5	wklęsłość ze względu na $w_h$	$\begin{bmatrix} \partial^2 VC / \partial w_1^2 & & \partial^2 VC / \partial w_1 \partial w_H \\ \vdots & & \vdots \\ & \dots & \partial^2 VC / \partial w_H^2 \end{bmatrix}$ a)
6	wypukłość ze względu na $k_p$	$\begin{bmatrix} \partial^2 VC / \partial k_1^2 & & \partial^2 VC / \partial k_1 \partial k_p \\ \vdots & & \vdots \\ & \dots & \partial^2 VC / \partial k_p^2 \end{bmatrix}$ b)

a) macierz jest symetryczna i ujemnie półokreślona.

b) macierz jest symetryczna i dodatnio półokreślona, zob. Simon i Blume [1994].

Źródło: Hazilla i Kopp [1986].

Własności VC (nr 2 i 6) za względu na czynniki stałe nie wynikają bezpośrednio z rozwiązania zagadnienia (1). Przyjmuje się je, aby z krótkookresowej funkcji kosztu zmiennego otrzymać długookresową funkcję kosztu całkowitego. Z punktu widzenia interpretacji własność druga oznacza (wykluczając graniczny przypadek słabej nierówności), że ewentualny wzrost zaangażowania czynnika stałego powoduje spadek kosztu zmiennego. Zgodnie z intuicją taka sytuacja ma miejsce, gdy istnieje substytucyjność między którymkolwiek stałym i zmiennym czynnikiem produkcji. Ta własność jest warunkiem koniecznym, aby z modelu PSE otrzymać model FSE, czyli m.in. określić optymalne nakłady wszystkich czynników produkcji. Należy zauważyć, że w zależności od postaci formy funkcyjnej VC, powyższe własności teoretyczne implikują nierównościowe i często nieliniowe restrykcje na parametry, które powinno się uwzględnić na etapie estymacji.<sup>6</sup>

Następnie, korzystając z Lematu Sheparda różniczkujemy funkcję daną wzorem (1), otrzymując krótkookresowe funkcje popytu na zmienne czynniki produkcji (*short-run factor demands*):

$$x_h^S \equiv \partial VC / \partial w_h \equiv x_h^S(\mathbf{w}, \mathbf{Q}, \mathbf{k}). \quad (2)$$

Zatem krótkookresowa funkcja kosztu całkowitego (*short-run total cost*) jako suma kosztów zaangażowania wszystkich czynników produkcji, zarówno zmiennych jak i stałych, przybiera postać

$$TC^S \equiv VC(\mathbf{w}, \mathbf{Q}, \mathbf{k}) + \mathbf{k} \cdot \mathbf{l}' \equiv TC^S(\mathbf{w}, \mathbf{l}, \mathbf{Q}, \mathbf{k}). \quad (3)$$

W kolejnym kroku wyznaczmy długookresową funkcję kosztu całkowitego  $TC^L$ . Uzyskamy ją poprzez minimalizację  $TC^S$  ze względu na  $P$  czynników stałych w sytuacji, gdy nakłady  $H$  czynników zmiennych gwarantują minimalizację kosztu zmiennego ( $VC$ ) niezbędnego do wytworzenia produkcji  $Q$  (przy ustalonych cenach wszystkich czynników):

$$TC^L \equiv \min_{\mathbf{k}} \{TC^S(\mathbf{w}, \mathbf{l}, \mathbf{Q}, \mathbf{k})\} \quad (4)$$

Warunkiem koniecznym istnienia rozwiązania powyższego zagadnienia jest

$$\partial TC^S(\mathbf{w}, \mathbf{l}, \mathbf{Q}, \mathbf{k}) / \partial k_p = \partial VC(\mathbf{w}, \mathbf{Q}, \mathbf{k}) / \partial k_p + l_p = 0 \text{ dla } p=1, \dots, P. \quad (5)$$

Z powyższego wynika, że przy założeniu dodatniej ceny  $l_p$  pochodna  $VC$  względem nakładów czynnika stałego, czyli koszt krańcowy ma ujemny znak, co odpowiada własności nr 2 dla funkcji  $VC$ . W literaturze wyrażenie  $-\partial VC / \partial k_p$  traktuje się jako tzw. *shadow value*, czyli cenę dualną czynnika stałego. Powiemy zatem, że jeżeli stały czynnik produkcji jest w równowadze długookresowej (statycznej), to obie ceny są sobie równe (zob. np. Schankerman i Nadiri [1986]). Natomiast warunek drugiego rzędu istnienia ekstremum dla problemu (4) jest zapewniony przez własność wypukłości krótkookresowej

---

<sup>6</sup> W przypadku funkcji Cobb'a i Douglasa, np.  $\ln(VC) = \alpha_0 + \sum \alpha_i \ln(w_i) + \sum \beta_p \ln(k_p) + \gamma \ln(Q)$ , problem restrykcji nie jest w pełni widoczny, bo własność 1 implikuje, że  $\alpha_i \geq 0$ , z własności 2 wynika  $\beta_p \leq 0$ , z własności 3 wynika  $\gamma \geq 0$ , natomiast własność 4 powoduje, że  $\sum \alpha_i = 1$ , własność 5 wynika z 1, a własność 6 z 2.

funkcji kosztu zmiennego względem  $k$ . Następnie oznaczmy rozwiązania układu równań (5) jako

$$k_p^L \equiv k_p^L(\mathbf{w}, \mathbf{l}, \mathbf{Q}) \quad \text{dla } p=1, \dots, P. \quad (6)$$

które określa optymalny poziom czynników gwarantujący minimalizację kosztu całkowitego. Odchylenie warunkowego (optymalnego) popytu na czynnik stały ( $k_p^L$ ) od wielkości popytu obserwowanego ( $k_p$ ) informuje nas o skali „niedostosowania” tego czynnika do optimum. W zależności od przyjętej formy funkcyjnej dla  $VC$  mogą pojawić się problemy z analitycznym rozwiązaniem układu równań (5), np. dla uogólnionego modelu Leontiewa w przypadku  $P=1$  jest to proste (por. np. Morrison [1988], Thomsen [2000]), natomiast w przypadku funkcji translogarytmicznej pozostaje nam tylko rozwiązanie numeryczne. W końcu możemy wyznaczyć także optymalne nakłady czynników zmiennych

$$x_h^L \equiv x_h^S(\mathbf{w}, \mathbf{Q}, \mathbf{k}^L(\mathbf{w}, \mathbf{l}, \mathbf{Q})) \equiv x_h^L(\mathbf{w}, \mathbf{l}, \mathbf{Q}) \quad \text{dla } h=1, \dots, H. \quad (7)$$

Ostatecznie podstawiając  $k_p^L$  do wzoru (3) uzyskujemy w analogiczny sposób długookresową funkcję kosztu całkowitego,

$$TC^L \equiv VC(\mathbf{w}, \mathbf{Q}, \mathbf{k}^L) + \mathbf{k}^L \cdot \mathbf{l}' = TC^S(\mathbf{w}, \mathbf{Q}, \mathbf{k}^L(\mathbf{w}, \mathbf{l}, \mathbf{Q})) \equiv TC^L(\mathbf{w}, \mathbf{l}, \mathbf{Q}), \quad (8)$$

która przedstawia minimalny koszt całkowity wytworzenia produkcji  $Q$  przy cenach czynników  $w$  i  $l$ .

Warunkowe funkcje popytu na czynniki produkcji (w modelu FSE) mogą być narzędziem do kwantyfikowania zależności substytucyjno-komplementarnych między dowolną parą czynników. W tym celu obliczamy cenowe elastyczności popytu jako pochodne logarytmiczne wyrażen (6) i (7) względem logarytmu dowolnej ceny. Definicja elastyczności popytu na jeden  $i$ -ty czynnik zmienny względem ceny  $j$ -tego czynnika zmiennego jest następująca<sup>7</sup>:

$$\theta_{ij}^L \equiv \partial \ln x_i^L / \partial \ln w_j = \frac{\partial^2 TC^L}{\partial w_i \partial w_j} \frac{w_j}{\partial TC^L / \partial w_i} \quad \text{dla } i, j \in \{1, \dots, H\}. \quad (9)$$

Problemy z estymacją  $\theta_{ij}^L$  pojawiają się, gdy stosując np. translogarytmiczną funkcję kosztu zmiennego ( $VC$ ), nie można analitycznie wyznaczyć  $k_p^L$ . Wtedy można skorzystać z propozycji Browna i Christensena [1981], którzy m. in. korzystając z zależności (8) wyrazili  $\theta_{ij}^L$  w kategoriach pochodnej funkcji  $VC$ . Warunek wklęsłości  $VC$  względem cen czynników zmiennych i wypukłości względem nakładów czynników stałych gwarantuje, że własne cenowe elastyczności popytu mają odpowiedni (ujemny) znak. Jeżeli mieszane cenowe elastyczności popytu przyjmują wartości mniejsze od zera to przyjmuje się, że mamy do czynienia z czynnikami komplementarnymi, w przeciwnym przypadku z substytutami.

---

<sup>7</sup> W analogiczny sposób można policzyć elastyczność popytu w przypadku obu czynników stałych lub czynnika zmiennego i stałego.

Na podstawie  $TC^L$  możemy określić tzw. długookresowy efekt skali ( $RTS^L$ ), informujący o procentowym wzroście wielkości produkcji za sprawą jednoprocetowego przyrostu kosztów całkowitych, spowodowanego jednoprocetowym wzrostem nakładów wszystkich czynników produkcji, które minimalizują koszt całkowity ( $TC$ ). Korzystając z (5) i (8) można dowieść, że

$$RTS^L = \left( \frac{\partial \ln TC^L}{\partial \ln Q} \right)^{-1} = \left( 1 - \sum_p \frac{\partial \ln VC}{\partial \ln k_p} \right) / \sum_g \frac{\partial \ln VC}{\partial \ln Q_g} \quad \text{dla } k_p = k_p^L. \quad (10)$$

Testowanie modelu PSE względem FSE polegać będzie na zweryfikowaniu hipotezy czy obserwowane nakłady czynników stałych są istotnie różne od nakładów optymalnych danych wzorem (6), obliczonych na podstawie oszacowanego modelu PSE. Thomsen [2000] proponuje alternatywne podejście, które polega na estymacji modelu FSE w ramach którego testuje się PSE.

### 3. Model statystyczny

W celu estymacji krótkookresowej funkcji kosztu zmiennego  $VC$  na podstawie danych przekrojowo-czasowych wykorzystamy podejście bayesowskie, które w przypadku stochastycznych model granicznych zaproponowali Koop, Osiewalski i Steel [1997], [1999], [2000]. W prezentowanych dalej badaniach empirycznych zastosujemy szczególnie przypadek stochastycznego modelu granicznej funkcji kosztu zakładający, że efektywność jest czystym efektem indywidualnym dla każdego z  $N$  obiektów w  $T$  okresach czasu (zob. także Pitt i Lee [1981] oraz Schmidt i Sickles [1984]):

$$y_{it} = h(x_{it}, \beta) + v_{it} + z_i, \quad (i=1, \dots, N; t=1, \dots, T), \quad (11)$$

czyli  $z_i \equiv z_{it}$ , gdzie  $z_i$  jest zmienną losową reprezentującą nieefektywność i przyjmującą wartości nieujemne,  $v_{it}$  jest zmienną losową o rozkładzie symetrycznym z wartością oczekiwaną równą zero, odzwierciedlającą błędy pomiaru, zakłócenia czysto losowe itp. Natomiast  $y_{it}$  jest wartością logarytmu naturalnego zaobserwowanego kosztu zmiennego ( $VC_{it}$ )  $i$ -tego obiektu (firmy) w okresie  $t$  ( $i=1, \dots, N; t=1, \dots, T$ ),  $x_{it}$  to wektor-wiersz zmiennych egzogenicznych (będących funkcjami wielkości produkcji, cen czynników zmiennych i nakładów czynników stałych),  $h$  oznacza odpowiednio wyspecyfikowaną graniczną funkcję kosztu, w naszym przypadku liniową względem  $K+1$  nieznanymi parametrów  $\beta$ . Miarą efektywności kosztowej jest  $r_i = \exp(-z_i)$ , czyli łatwo interpretowalna wielkość o wartościach w przedziale (0,1].

W niniejszym opracowaniu wykorzystano model o zmiennym rozkładzie efektywności (*Varying Efficiency Distribution* - VED), który wprowadzili Koop, Osiewalski i Steel [1997]. Zatem przyjęto założenia, że zmienne  $v_{it}$  mają identyczne, niezależne rozkłady normalne ze średnią zero i stałą wariancją  $\sigma_v^2$ . Zmienne  $z_i$  posiadają

rozkłady wykładnicze o wartości oczekiwanej  $\lambda_i$ , która zależy od pewnych egzogenicznych zmiennych ( $s_{ij}$ ) wyjaśniających różnicowanie efektywności firm, w szczególności

$$\lambda_i = \prod_{j=1}^m \phi_j^{-s_{ij}}, \quad (12)$$

gdzie  $\phi_j > 0$  są nieznanymi parametrami, a  $s_{i1} = 1$ .

Z uwagi na ograniczoną objętość pracy pomijamy specyfikację rozkładów a priori oraz pełnych rozkładów warunkowych; zob. Koop, Osiewalski i Steel [1997], Osiewalski [2001]. Wykorzystując prostą postać warunkowych rozkładów a posteriori za pomocą losowania Gibbsa uzyskaliśmy numerycznie wartości oczekiwane, odchylenia standardowe i brzegowe gęstości a posteriori dla nieznanymi parametrów i parametrów ukrytych w modelu VED. Schemat Gibbsa jest jedną z metod Monte Carlo typu łańcuchów Markowa, która w omawianym modelu umożliwia w sposób w pełni automatyczny i efektywny numerycznie przybliżanie charakterystyk rozkładów a posteriori, czyli całek wielokrotnych (zob. np. Casella i George [1992], Tierney [1994]). Dodatkowo umożliwia ona uwzględnianie restrykcji na parametry, które wynikają z teorii ekonomii. Szczegółowy opis zastosowania algorytmu Gibbsa w modelu VED podają Koop, Osiewalski i Steel [1997], Osiewalski i Steel [1998], a także Osiewalski [2001].

W części następniej prezentowane są wyniki empiryczne, które uzyskano stosując strukturę stochastyczną VED i podejście bayesowskie do estymacji modelu PSE. Wyniki te uwzględniają wszystkie warunki regularności ekonomicznej dla mikroekonomicznej funkcji kosztu, w tym warunek wklęsłości funkcji kosztu względem cen czynników produkcji i wypukłości względem nakładów czynników stałych; w badaniach empirycznych warunki te są bardzo rzadko uwzględniane czy też sprawdzane.

## 4. Wyniki estymacji

Estymacji krótkookresowej funkcji kosztu zmiennego dokonano w oparciu o bayesowski model VED, wykorzystując dane z czterech kwartałów 1997 roku ( $T=4$ ), dotyczące 58 oddziałów jednego z polskich banków komercyjnych. Stochastyczny model graniczny krótkookresowej translogarytmicznej funkcji kosztu zmiennego (VC) ma następującą postać

$$\begin{aligned} \ln VC_{it} = & \delta_0 + \delta_1 \ln w_{it,D} + \delta_2 \ln L_{it} + \delta_3 \ln Q_{it,1} + \delta_4 \ln K_i \\ & + \delta_5 \ln w_{it,D} \ln L_{it} + \delta_6 \ln w_{it,D} \ln Q_{it,1} + \delta_7 \ln L_{it} \ln K_i \\ & + \delta_8 \ln L_{it} \ln Q_{it,1} + \delta_9 \ln L_{it} \ln K_i + \delta_{10} \ln Q_{it,1} \ln K_i \\ & + \delta_{11} (\ln w_{it,D})^2 + \delta_{12} (\ln L_{it})^2 + \delta_{13} (\ln Q_{it,1})^2 + \delta_{14} (\ln K_i)^2 \\ & + \delta_{15} \ln Q_{it,2} + \delta_{16} \ln w_{it,D} \ln Q_{it,2} + \delta_{17} \ln L_{it} \ln Q_{it,2} \\ & + \delta_{18} \ln Q_{it,1} \ln Q_{it,2} + \delta_{19} \ln Q_{it,2} \ln K_i + \delta_{20} (\ln Q_{it,2})^2 + v_{it} + z_i, \end{aligned} \quad (13)$$



gdzie  $VC$  oznacza sumę kosztów zaangażowania zmiennych czynników produkcji: kapitału ludzkiego, finansowego oraz materiałów i akcesoriów komputerowych,  $Q_1$  – wolumen kredytów udzielonych klientom komercyjnym (plus będąca w dyspozycji centrali banku nadwyżka depozytów nad kredytami w przypadku oddziałów specjalizujących się w pozyskiwaniu środków),  $Q_2$  – wolumen kredytów udzielonych klientom detalicznym,  $w_D$  – cenę czynnika finansowego (depozytów i środków z centrali finansujących nadwyżkę kredytów nad depozytami w przypadku oddziałów mających taką nadwyżkę). Natomiast  $L$  i  $K$  oznacza zaangażowanie czynników stałych, pracy ludzkiej i kapitału fizycznego, mierzone odpowiednio liczbą etatów i poprzez powierzchnię (w metrach kwadratowych) eksploatowanych pomieszczeń biurowych własnych i najmowanych przez oddział. Zaangażowanie tego ostatniego czynnika w badanym okresie nie ulegało zmianie w poszczególnych kwartałach 1997 roku. Dodatkowo przyjęliśmy, iż nieobserwowana cena dodatkowego czynnika zmiennego ( $w_M$ ), tj. innych środków trwałych (m. in. sprzęt komputerowy), materiałów i wyposażenia biurowego oraz wartości niematerialnych i prawnych (m.in. oprogramowania) jest stała zarówno w oddziałach, jak i w czasie, więc nie pojawia się ona bezpośrednio w funkcji kosztu, lecz jest ukryta w parametrach  $\delta_0$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ ,  $\delta_4$  i  $\delta_{16}$  (zob. np. Osiewalski i Marzec [1998b], [1998c], Marzec [2000]). Dyskusję doboru zmiennych w przypadku funkcji kosztu w sektorze bankowym w oparciu o podejście Sealeya i Lindleya [1977] przedstawia Marzec [1999, 2000, 2001] wraz z dokładną charakterystyką danych źródłowych wykorzystywanych w niniejszym opracowaniu.

W celu wyjaśnienia zróżnicowania poziomu efektywności wyróżniono trzy zmienne dychotomiczne ( $m=4$ ,  $s_{it} \equiv 1$ ), odzwierciedlające: 1<sup>o</sup> specjalizację oddziałów ( $s_{i2}$ ), 2<sup>o</sup> wielkość oddziału mierzona wartością produkcji ( $s_{i3}$ ) i 3<sup>o</sup> posiadanie przez oddziały filii mających szeroki zakres uprawnień, tzn. świadcząca pełny zakres usług bankowych ( $s_{i4}$ ). W szczególności  $s_{i2} = 1$ , gdy w badanym okresie średnia miesięczna wartość kredytów udzielonych przez oddział była większa od wartości pozyskanych depozytów ( $s_{i2} = 0$  w przeciwnym przypadku);  $s_{i3} = 1$ , gdy średnia miesięczna wartość kredytów oddziału była większa niż 100 mln złotych ( $s_{i3} = 0$  w przeciwnym przypadku),  $s_{i4} = 1$ , gdy oddział posiada filię ( $s_{i4} = 0$  w przeciwnym przypadku).

Zastosowanie wnioskowania bayesowskiego i losowania Gibbsa pozwoliło na uwzględnienie wszystkich restrykcji, jakie narzuca na parametry teoria ekonomii. W omawianym przypadku dla funkcji translogarytmicznej narzucono je dla tzw. „przeciętnego oddziału”, który posiada wartości ceny depozytów, wielkości obu produktów oraz nakładów czynników stałych na poziomie średnich arytmetycznych z 58 oddziałów i 4 kwartałów.<sup>8</sup> W badanym 1997 roku cena depozytów liczona jako średnia

---

<sup>8</sup> W wcześniejszych pracach uzyskano wyniki bez uwzględnienia wypukłości względem czynników stałych, nakładając pozostałe warunki egularności ekonomicznej dla oddziału charakteryzującego się średnimi geometrycznymi wartościami cen czynników, wielkości produktów oraz czynników stałych (zob. Marzec i Osiewalski [1996-97, 2001], Marzec [1998a, 1998b, 1999, 2000, 2001], Osiewalski i Marzec, [1998a, 1998b, 1998c], Osiewalski [2001]).

arytmetyczna wynosiła 12,8%, stan zatrudnionych w oddziale wynosił ponad 84 etaty, pomieszczenia biurowe zajmowały ponad 1600 m<sup>2</sup>, wartość udzielonych kredytów komercyjnych i detalicznych kształtowała się w na poziomie 106,3 i 11,3 mln zł. Średni kwartalny koszt zmienny wynosił 4,010 mln zł.

Ograniczenia na parametry uwzględnione w rozkładach a priori, łatwo w omawianym przypadku wyrazić w kategoriach elastyczności funkcji kosztu względem poszczególnych zmiennych  $\eta(VC/\cdot)$ , co przedstawia następująca tabela.

Tabela 2. Restrykcje uwzględniane przy estymacji funkcji danej wzorem (13).<sup>9</sup>

własność	opis	Warunek
1	niemalejąca ze względu na ceny $w_h$	$\eta(VC/w_D) > 0$
2	nierosnąca ze względu na nakłady $k_p$	$\eta(VC/L) < 0$ $\eta(VC/K) < 0$
3	niemalejąca ze względu na $Q_h$	$\eta(VC/Q_1) > 0$ $\eta(VC/Q_2) > 0$
4	jednorodna stopnia 1 ze względu na $w_h$	$\eta(VC/w_D) < 1$
5	wklęsłość ze względu na $w_h$	$2\delta_{11} - \eta(VC/w_D) \cdot (1 - \eta(VC/w_D)) < 0$
6	wypukłość ze względu na $k_p$	$a = 2\delta_{12} - \eta(VC/L) \cdot (1 - \eta(VC/L)) > 0$ $b = 2\delta_{14} - \eta(VC/K) \cdot (1 - \eta(VC/K)) > 0$ $a \cdot b - \delta_9 \cdot \eta(VC/L) \cdot \eta(VC/K) > 0,$

Źródło: obliczenia własne.

W dalszej części prezentowane są uzyskane wyniki empiryczne, które - z uwagi na ograniczoną objętość pracy - będą prezentowane dla przeciętnego oddziału.<sup>10</sup> Tabela 3 przedstawia wartości oczekiwane i odchylenia standardowe a posteriori dla parametrów modelu (13). Interesujące informacje o technologii oddziałów zawiera tabela 4, prezentująca wartości oczekiwane i odchylenia standardowe a posteriori dla elastyczności kosztu względem poszczególnych zmiennych w przypadku przeciętnego oddziału. Szczególną uwagę zwracają relatywnie małe odchylenia standardowe a posteriori dla elastyczności, co należy tłumaczyć tym, że narzucone warunki regularności ekonomicznej były wiążące. Ograniczyły one w ten sposób przestrzeń parametrów, w której odbywały się losowania w ramach kolejnych cykli Gibbsa. Spośród wszystkich restrykcji potwierdzenia w danych empirycznych nie znalazła jedna z własności funkcji kosztu zmiennego (VC): niedodatniość pochodnej względem nakładów czynników stałych, tj.

<sup>9</sup> Przy uwzględnieniu faktu, że w przypadku ciągłych rozkładów prawdopodobieństwa dla wektora parametrów  $\beta$ , prawdopodobieństwo a priori i a posteriori spełnienia równościowych ograniczeń wynosi zero (zob. Marzec i Osiewalski [2001]).

<sup>10</sup> Wszystkie wyniki uzyskano na podstawie 2·10<sup>5</sup> cykli Gibbsa, po odrzuceniu dodatkowych 5·10<sup>4</sup> cykli spalonych koniecznych, aby zyskać zbieżność algorytmu.

liczby zatrudnionych ( $L$ ) i powierzchni pomieszczeń biurowych ( $K$ ). Szczególnie ta ostatnia restrykcja (względem  $K$ ) okazała się być silnie wiążąca, por. poprzednie opracowania, gdzie dla większości oddziałów elastyczności kosztu zmiennego względem tego czynnika stałego były istotnie dodatnie. Pozostałe warunki regularności praktycznie nie wymagały narzucania w ramach Gibbsa jakichkolwiek ograniczeń na elementy wektora  $\delta$ .

Tabela 3. Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe a posteriori parametrów modelu VED.

Parametr	Zmienna	E(· dane)	D(· dane)	Parametr	Zmienna	E(· dane)	D(· dane)
$\delta_0$	Stała	5,876	3,002	$\delta_{13}$	$(\ln Q_1)^2$	0,058	0,010
$\delta_1$	$\ln w_D$	0,721	0,581	$\delta_{14}$	$(\ln K)^2$	0,001	0,003
$\delta_2$	$\ln L$	1,854	0,563	$\delta_{15}$	$\ln Q_2$	-0,567	0,203
$\delta_3$	$\ln Q_1$	-0,131	0,314	$\delta_{16}$	$\ln w_D \ln Q_2$	-0,019	0,020
$\delta_4$	$\ln K$	-0,066	0,159	$\delta_{17}$	$\ln L \ln Q_2$	-0,071	0,024
$\delta_5$	$\ln w_D \ln L$	-0,077	0,049	$\delta_{18}$	$\ln Q_1 \ln Q_2$	-0,052	0,011
$\delta_6$	$\ln w_D \ln Q_1$	0,038	0,030	$\delta_{19}$	$\ln K \ln Q_2$	0,001	0,010
$\delta_7$	$\ln w_D \ln K$	0,045	0,020	$\delta_{20}$	$(\ln Q_2)^2$	0,063	0,005
$\delta_8$	$\ln L \ln Q_1$	-0,086	0,036	$\phi_1$	$s_{j1}=1$	21,899	5,739
$\delta_9$	$\ln L \ln K$	-0,004	0,017	$\phi_2$	$s_{j2}$	1,148	0,353
$\delta_{10}$	$\ln Q_1 \ln K$	-0,004	0,011	$\phi_3$	$s_{j3}$	1,272	0,427
$\delta_{11}$	$(\ln w_D)^2$	-0,029	0,030	$\phi_4$	$s_{j4}$	1,067	0,466
$\delta_{12}$	$(\ln L)^2$	0,124	0,041	$\text{Var}(v_{it})=\sigma_v^2$	-	0,00045	0,00006

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 4. Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe a posteriori dla elastyczności przeciętnego oddziału w modelu VED.

	$\eta(VC/w_D)$	$1-\eta(VC/w_D)$	$\eta(VC/Q_1)$	$\eta(VC/Q_2)$	$\eta(VC/L)$	$\eta(VC/K)$
Wartość oczekiwana	0,96490	0,03510	0,85080	0,15460	-0,00794	-0,00317
Odchylenie standardowe	(0,00027)	(0,00027)	(0,00006)	(0,00005)	(0,00005)	(0,00001)
Średnie odchylenie standardowe (średnia z odchyleń standardowych 58 oddziałów).						
	(0,00115)	(0,00115)	(0,00038)	(0,00022)	(0,00123)	(0,00017)

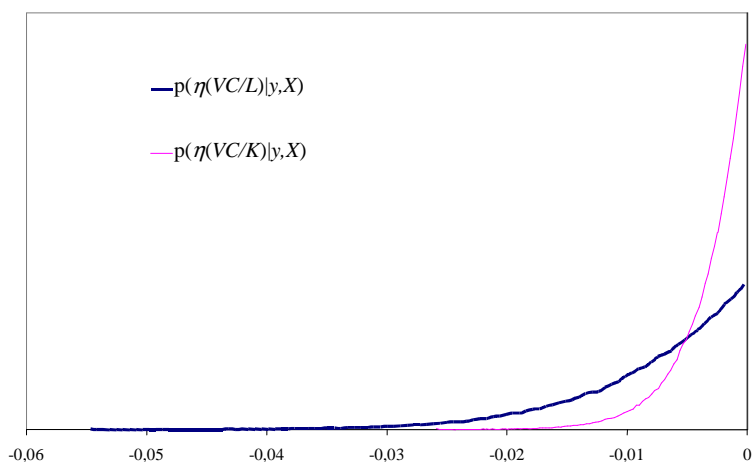
Źródło: obliczenia własne.

Największy i statystycznie istotny wpływ na kształtowanie się kosztu zmiennego ma cena czynnika finansowego ( $w_D$ ) oraz wielkość udzielonych kredytów komercyjnych ( $Q_1$ ). Wzrost wartości wolumenu kredytów komercyjnych (detalicznych) o 1% wymaga wzrostu kosztu zmiennego o około 0,85% (0,16%) *ceteris paribus*. Wartość oczekiwana współczynnik długookresowego efektu skali, wzór (10), obliczonego dla obserwowanych nakładów pracy i kapitału fizycznego (nieruchomości) wyniosła 1.006 ( $\pm 0,01$ ) wskazuje na stały efekt skali. Natomiast jednoprocenowy wzrost ceny depozytów (i innych pozyskanych środków) powoduje wzrost kosztu zmiennego o ponad 0,96% *ceteris paribus*. Oznacza to, że w przypadku przeciętnego oddziału, optymalny udział kosztu zaangażowania tego czynnika w całkowitym koszcie zmiennym, który należy ponieść w celu uzyskania wolumenu kredytów w wysokości 117,6 mln zł, wynosi 96,5%, gdy w rzeczywistości udział ten wyniósł prawie 94,7%. Zatem nakłady obydwu czynników zmiennych w sposób istotny nie odbiegają od nakładów optymalnych, w tym sensie że

optymalizacja ta jest warunkowa względem ustalonych nakładów pracy i kapitału. Zwiększenie powierzchni oddziału o 10% (160m<sup>2</sup>) obniży koszty zmienne o około 0.03% (1 272 zł). Natomiast ewentualny wzrost zatrudnienia o 10 osób (czyli o około 12%) spowoduje spadek kosztu zmiennego w kwartale tylko o około 3 819 zł (mniej niż 0,1%), co przy miesięcznej płacy brutto na poziomie 2 605 zł powoduje że z ekonomicznego punktu widzenia ewentualne zwiększenie zatrudnienia jest bezzasadne. Zatem wydaje się, że obserwowany poziom zatrudnienia jest zdecydowanie zbyt duży. Dodatkowo rysunek 1 przedstawia rozkłady a posteriori elastyczności względem pracy i nieruchomości, które uzyskano poprzez wygładzenie histogramów. Kształt tych rozkładów wynika z ucięcia w zerze, co jest spowodowane narzuceniem restrykcyj nr 2.

W uzupełnieniu należy dodać, że przeciętny oddział charakteryzuje się wysoką efektywnością wynoszącą ponad 96% ( $\pm 2\%$ ), co oznacza że jedynie 4% kosztów zmiennych jest nadwyżkowym kosztem. Tymczasem we wcześniejszych badaniach, w których traktowano pracę jest czynniki zmienny, efektywność kosztowa w przeciętnym oddziale była mniejsza i wynosiła około 92% (zob. np. Marzec [2001, 2000] lub wcześniejsze). Te wyniki pośrednio wskazuje na fakt, że potencjalnym źródłem nieefektywności oddziałów może być brak optymalizacji obserwowanego poziomu zatrudnienia. Ponadto żadna spośród wyróżnionych zmiennych  $s_{ij}$  nie wyjaśnia w sposób istotny zróżnicowania efektywności oddziałów.

Rysunek 1. Rozkład a posteriori elastyczności względem nakładu czynników stałych przeciętnego oddziału: pracy ( $L$ ) i nieruchomości ( $K$ ).



Źródło: obliczenia własne.

Zatem przejdźmy do prezentowania wyników, które poinformowałyby nas czy w modelu PSE zaangażowanie czynników stałych jest na optymalnym poziomie. Jeżeli dane empiryczne nie odrzuciłyby tej hipotezy, to adekwatnym modelem byłby model pełnej równowagi statycznej (FSE). W przypadku posiadanych danych zweryfikowanie tego założenia nie jest w pełni możliwe, z uwagi na brak ceny jednego z czynników produkcji - pomieszczeń biurowych. Część budynków eksploatowanych przez oddziały stanowią ich

własność, stąd trudno określić ich rynkową cenę wynajmu. Cena ta zależy nie tylko od wielkości miasta, w którym ma siedzibę oddział, ale także od usytuowania siedziby w samym mieście. W tej sytuacji zostanie obliczony optymalny poziom zatrudnienia, który będzie warunkowy względem zaangażowania drugiego czynnika. W przypadku funkcji translogarytmicznej (13) równanie, które podlega numerycznemu rozwiązaniu ze względu na  $L$  następującą postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial VC(w_D, Q_1, Q_2, L, K)}{\partial L} + l_L &= 0 \\ \frac{\partial \ln VC}{\partial \ln L} \cdot \frac{VC}{L} + l_L &= 0 \\ c_0 \cdot (c_1 + 2\delta_{12} \cdot \ln L) \cdot L^{c_1 + 2\delta_{12} \cdot \ln L - 1} + l_L &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

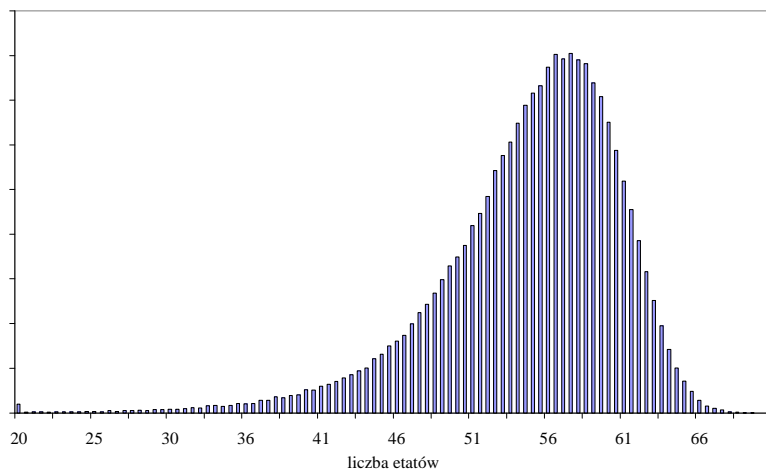
gdzie  $l_L$  to średnie wynagrodzenia brutto, a  $c_0$  i  $c_1$  to wielkości, które nie zależą od  $L$ , lecz od parametrów funkcji (13) i pozostałych zmiennych objaśniających w tym równaniu. Rozwiązanie powyższego równania - optymalna liczba zatrudnionych - zostanie oznaczona jako  $L^{opt}$ .

W celu weryfikacji hipotezy, czy obserwowany poziom zatrudnienia istotnie nie różni się od poziomu optymalnego, wykorzystano bayesowski testu oparty na przedziale o największej gęstości a posteriori (przy ustalonej masie prawdopodobieństwa), zwany także testem Lindleya (zob. Box i Tiao [1973]). W tym celu w każdym cyklu Gibbsa obliczano optymalny poziom pracy, co pozwoliło na zbudowanie gęstości a posteriori dla zmiennej  $L^{opt}$ . Wykorzystanie tego testu sprowadza się do zbadania czy punkt  $L^{opt} = L^{obs}$  należy do przedziału o największej gęstości a posteriori odpowiadający ustalonemu prawdopodobieństwu  $1-\alpha$ , gdzie np.  $\alpha=0,1$ , co przedstawia rysunek 2. Punkt odpowiadający obserwowanemu zatrudnieniu, które wynosi  $L^{obs}=84,25$  etatu znajduje się na poza przedziałem, na którym skupiona jest prawie cała masa prawdopodobieństwa. Zatem powyższa hipoteza zostaje odrzucona dla praktycznie każdego poziomu  $\alpha$ . Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe a posteriori dla  $L^{opt}$  wynosi odpowiednio 54,7 ( $\pm 6,2$ ) co wskazuje, iż w przeciętnym oddziale obserwowane zatrudnienie było prawie o 30 etatów od optymalnego.<sup>11</sup>

---

<sup>11</sup> W chwili obecnej w badanym banku, po jego przejęciu przez inwestora zagranicznego i planowanej fuzji z innym polskim bankiem, mówi się o około 20% redukcji zatrudnienia.

Rysunek 2. Rozkład *a posteriori* optymalnego nakładu czynnika stałego – pracy ( $L^{opt}$ ).<sup>12</sup>



Źródło: obliczenia własne.

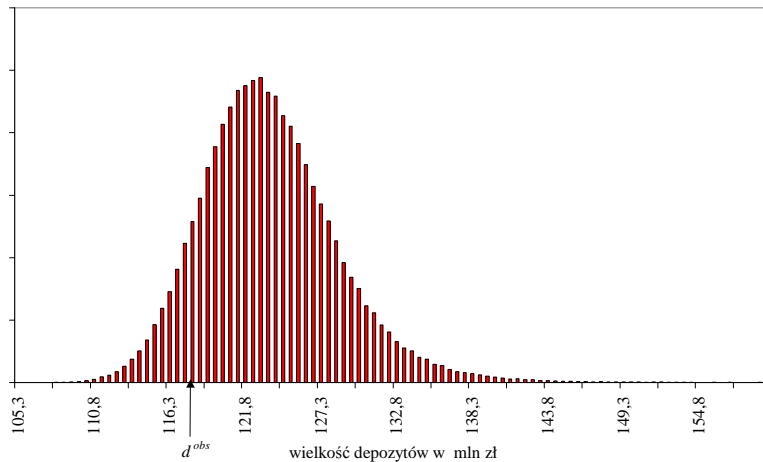
W następnej kolejności można obliczyć także funkcję warunkowego popytu na finansowy zmienny czynnik produkcji - depozyty, po uwzględnieniu optymalnej wielkości pracy. Udział tego czynnika w koszcie zmiennym (VC) jest znaczący i wynosi 94,7%. Optymalny poziom depozytów  $dep^{opt}$  oblicza się wg formuły (7), którą w przypadku funkcji translogarytmicznej można wygodnie zapisać jako:

$$Dep^{opt} = \frac{\partial VC(w_D, Q_1, Q_2, L^{opt}, K)}{\partial w_D} = \frac{\partial \ln VC(w_D, Q_1, Q_2, L^{opt}, K)}{\partial \ln w_D} \cdot \frac{VC(w_D, Q_1, Q_2, L^{opt}, K)}{w_D} \quad (15)$$

Obserwowane zaangażowanie depozytów  $dep^{obs}$  wynosi 117,6 mln zł, zaś nakład optymalny, mierzony wartością oczekiwaną dla zmiennej  $dep^{opt}$ , kształtuje się na poziomie 123,5 ( $\pm 5,1$ ) mln zł. Poniższy rysunek przedstawia gęstość *a posteriori* dla optymalnego poziomu depozytów, na podstawie którego można zweryfikować hipotezę  $dep^{opt} = dep^{obs}$ . Punkt  $dep^{obs}$  należy do przedziału o największej gęstości *a posteriori*, gdy  $\alpha$  ustali się na poziomie 0,26 i mniejszym. Prowadzi to do wniosku, że mimo dużego przerostu zatrudnienia obserwowane zaangażowanie depozytów nie różni się istotnie od wielkości optymalnej.

Rysunek 3. Rozkład *a posteriori* optymalnego nakładu czynnika zmiennego - depozytów ( $D^{opt}$ ).

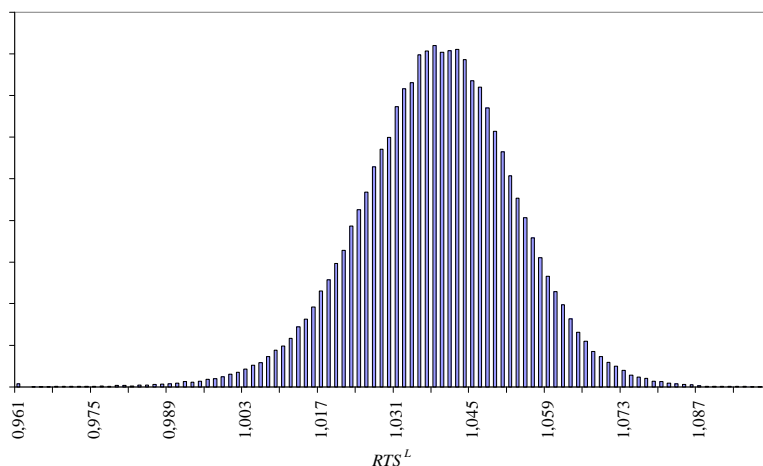
<sup>12</sup> W lewym ogonie rozkładu znajduje się skumulowane prawdopodobieństwo.



Źródło: obliczenia własne.

W celu pełnej prezentacji głównych charakterystyk technologii badanych oddziałów należy określić tzw. długookresowy efekt skali  $RTS^L$  dla funkcji kosztu całkowitego z optymalnym nakładem pracy; wzór (10). Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe dla  $RTS^L$  wynosi odpowiednio 1,038 i 0,015, co przemawia raczej za rosnącym niż stałym efektem skali. Na podstawie rysunku 4 można stwierdzić, że punkt  $RTS^L=1$  znajduje się w przedziale o największej gęstości a posteriori, jeżeli  $\alpha$  jest mniejsze niż 0,02. Prawdopodobieństwo a posteriori, że  $RTS^L > 1$  wynosi prawie 0,99. Oba te wyniki silnie wskazują na rosnące korzyści skali. Zatem wzrost zysku można uzyskać poprzez zwiększenie skali działalności (do czasu pojawiania się stałego efektu skali), czyli wzrost produkcji mierzonej wartością udzielanych kredytów. Musi jednak temu towarzyszyć optymalizacja nakładu pracy - zmniejszenie liczby zatrudnionych. Warto przypomnieć, że dla obserwowanego (nieoptymalnego) nakładu pracy i nakładu kapitału fizycznego (nieruchomości) wartość oczekiwana współczynnika długookresowego efektu skali wynosi 1.006 ( $\pm 0,01$ ), co wskazuje na stały efekt skali.

Rysunek 4. Rozkład a posteriori dla długookresowego efektu skali -  $RTS^L$ .



Źródło: obliczenia własne.

Podsumowując otrzymane wyniki można stwierdzić, że obserwowany poziom zatrudnienia w badanych oddziałach banku komercyjnego jest istotnie większy od wielkości optymalnej. Tym samym przerost zatrudnienia jest źródłem nieefektywności, a rosnące korzyści skali wskazują na sposób zwiększenia zysku banku poprzez wzrost wartości udzielanych kredytów. W tym przypadku użyty model częściowej równowagi statycznej (PSE) jest bardziej uzasadnionym podejściem, w ramach którego możliwe jest testowanie modelu pełnej równowagi statycznej FSE. Natomiast wnioskowanie bayesowskie i losowanie Gibbsa pozwoliło na uzyskanie wszystkich wyników, których otrzymanie przy pomocy metod klasycznych byłoby bardzo trudne. Uzyskane wyniki empiryczne wydają się być bardzo użyteczne w procesie podejmowania decyzji w centrali banku.

## 5. Bibliografia

- Aigner, D., C.A.K. Lovell, P. Schmidt [1977], Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models, Journal of Econometrics, 6, 21-37.
- Atkinson S. E., A. Halvorsen [1998], Parametric test for static and dynamic equilibrium, Jornal of Econometrics, 85, s. 33-55.
- Atkinson S.E., C. Cornwell [1994], Parametric estimation of technical and allocative inefficiency with panel date, International Economic Review, 1.
- Box G., G. Tiao [1973], Bayesian Inference in Statistical Analysis, Addison-Wesley Publishing Company, Reading.
- Broeck van den J., G. Koop, J. Osiewalski, M.F.J. Steel [1994], Stochastic frontier models: A Bayesian perspective, Journal of Econometrics, 61, 273-303.
- Brown R. S., L.R. Christensen [1981], Estimaties of substitution in a model of partial static equilibrium: An application to U.S. agriculture, 1947-1974, in: E.R Berndt and B.C Fields (eds.), Modeling and Measuring Natural Resource Substitution, MIT Press, Cambrige s. 207-229.
- Browning M.J. [1983], Necessary and sufficient conditions sfor conditional cost fuctions, Econometrica, 51 (3), s. 851-855.
- Casella G., E. George [1992], Explaining the Gibbs sampler, The American Statistician, 46, 167-174.
- Christensen, L.R., D. Jorgenson, L. Lau [1973], Transcendental Logarithmic Production Frontiers, The Review of Economics and Statistics, 55.
- Diewert E. W. [1971], An application of the Shephard Duality Therorem, a generalized Leontief production function, Journal of Political Economy, 79 (3), s. 481-507.
- Hazilla M, R.J. Kopp [1986], Testing for separable functionall structure using temporary equilibrium models, Jornal of Econometrics, 33, s. 119-141.
- Kolstand C.,D., J. K.Lee [1993], The specification of dynamics in cost function and factor demand estimation, Review of Economics and Statistics, 75 (4), s. 721-726.
- Koop G., J. Osiewalski, M.F.J. Steel [1997], Bayesian efficiency analysis through individual effects: Hospital cost frontiers, Journal of Econometrics, 76, 77-105.
- Koop G., M.F.J. Steel, J. Osiewalski, [1995], Posterior analysis of stochastic frontier models using Gibbs Sampling, Computational Statistics, 10, 353-373.



- Kulatilaka N., [1985], Tests of the validity of static equilibrium models, Jornal of Econometrics, 28, s. 253-268.
- Kulatilaka N., 1987, The specification of partial static equilibrium models, Review of Economics and Statistics, 69 (1), s. 327-335.
- Lau L.J. [1976], A characterization of the normalized restricted profit function., Journal of Economic Theory, 12, s. 131-163.
- Marzec J. [1998a], Modelowanie procesu produkcji banków i badanie ich efektywności kosztowej” Ekonometria czasu Transformacji (Materiały XXXIV Konferencji Statystyków, Ekonometryków i Matematyków Akademii Ekonomicznych Polski Południowej, (Ustroń, maj 1998), Akademia Ekonomiczna w Katowicach, s. 87-98.
- Marzec J. [1998b], Produkty i czynniki produkcji w badaniach efektywności kosztowej banków, Zastosowania rozwiązań informatycznych w bankowości (materiały konferencyjne pod red. A. Gospodarowicza), Prace Naukowe AE we Wrocławiu nr 797, s. 156-164.
- Marzec J. [1999], Produkty, czynniki produkcji i funkcja kosztów w badaniach efektywności kosztowej banków, Ekonomista, 3, s. 281-304.
- Marzec J. [2000], Ekonometryczna analiza efektywności kosztów w bankach komercyjnych, maszynopis pracy doktorskiej, Akademia Ekonomiczna w Krakowie.
- Marzec J. [2001], Graniczna funkcja kosztu dla oddziałów banku: wyniki estymacji bayesowskiej, Metody ilościowe w naukach ekonomicznych (red. A. Welfe), SGH w Warszawie, s. 103-124.
- Marzec J., J. Osiewalski [1996-97], Pomiar efektywności kosztowej banków: zarys metodologii, Folia Economica Cracoviensia, 39-40, s. 81-96.
- Marzec J., J. Osiewalski [2001], Bayesian Inference on Technology and Cost Efficiency of Bank Branches, maszynopis, Akademia Ekonomiczna w Krakowie.
- McFadden D.L. [1978], Cost, revenue, and profit functions, in: M. Fuss and D.L. McFadden eds., Productions economics: A dual approach to theory and applications: Vol. 1, The theory of production, North Holland, Amsterdam, s. 3-109.
- Meeusen W., J. van den Broeck [1977], Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed error, International Economic Review, 8, s. 435-444.
- Morrison, C. J. [1992], Quasi-fixed inputs in U.S. and Japanese manufacturing: A general Leontief restricted cost function approach, The Review of Economics and Statistics, 2 (2), s. 275-287.
- Morrison, C. J., E.R. Berndt [1981], Short-run labor productivity in a dynamic models, Journal of Econometrics, 16, s. 339-365.
- Nelson R. A. [1985], Returns to scale from variable and total cost function: Evidence from electric power industry, Economics Letters, 18, s. 271-276.
- Nemoto J., Y. Nakanishi, S. Madono [1993], Scale economies and over-capitalization in Japanese electric utilities, International Economic Review, 34 (2), s. 431-440.
- Osiewalski J. [2001], Ekonometria bayesowska w zastosowaniach, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.
- Osiewalski J., J. Marzec [1998a], Bayesian analysis of cost efficiency with an application to bank branches, Global Tendencies and Changes in East European Banking (E. Miklaszewska, ed.), Kraków: Jagiellonian University, s. 15-166.
- Osiewalski J., J. Marzec [1998b], Nowoczesne metody Monte Carlo w bayesowskiej analizie efektywności kosztowej banków, Zastosowania rozwiązań informatycznych w bankowości (materiały konferencyjne pod red. A. Gospodarowicza), Prace Naukowe AE we Wrocławiu nr 797, s. 182-195.
- Osiewalski J., J. Marzec [1998c], Bayesowska analiza efektywności kosztowej oddziałów banku: założenia i wyniki, Prognozowanie w zarządzaniu firmą (materiały konferencyjne pod red. M. Cieślak i D. Kwiatkowskiej-Ciotuchy), Prace Naukowe AE we Wrocławiu nr 808, s. 24-33.
- Osiewalski J., M.F.J. Steel [1998]. "Numerical tools for the Bayesian analysis of stochastic frontier models." Journal of Productivity Analysis, 10, s. 103-117.
- Pitt M., L.F. Lee, 1981, „The measurement and sources of technical inefficiency in the Indonesian weaving industry”, Journal of Development Economics, 9, 43-64.

- Schankerman M., I. M. Nadiri [1986], A test of static equilibrium models and rates of return to quasi-fixed factors, with an application to the Bell System, Journal of Econometrics, 33, s. 97-118.
- Sealey C.W., J.T. Lindley [1977], Inputs, outputs, and a theory of production and cost at depository financial institutions, Journal of Finance, 32, s. 1251-1266.
- Simon C.P., L. Blume [1994], Mathematics for Economists, New York: W.W.Norton.
- Slade M. E. [1986], Total-factor-productivity measurement when equilibrium is temporary, Journal of Econometrics, 33, s. 75-95.
- Thomsen T. [2000], Short cuts to dynamic factor demand modeling, Journal of Econometrics, 97, s. 1-23.
- Tierney L [1994], Markov chains for exploring posterior distributions (with discussion), Annals of Statistics, 22, s. 1701-1762.
- Varian H.R. [1992], Microeconomic Analysis, Norton & Company Inc., New York.