

Maszynopis artykułu: Marzec J., J. Osiewalski, 1996-97, Pomiar efektywności kosztowej banków: zarys metodologii, „Folia Oeconomica Cracoviensia”, vol. 39-40, s. 65–81.

Jerzy Marzec, Jacek Osiewalski

(Katedra Ekonometrii Akademii Ekonomicznej w Krakowie)

**Pomiar efektywności kosztowej banków:
zarys metodologiiⁱ**

Kraków, październik 1997

1. Wprowadzenie

Przedsiębiorstwo ponosi koszty większe niż niezbędne (jest nieefektywne kosztowo; ang. *cost inefficient*) jeżeli 1^o jest nieefektywne technicznie, tj. angażuje zbyt duże (w stosunku do wymagań technologicznych) nakłady czynników produkcji w celu osiągnięcia danej wielkości produkcji, lub 2^o jest nieefektywne alokacyjnie, tj. proporcje nakładów czynników nie odpowiadają relacji ich cen rynkowych (dla zastosowanej kombinacji nakładów krańcowe stopy substytucji nie są równe odpowiednim ilorazom cen czynników). Przez efektywność kosztową rozumie się iloraz minimalnego kosztu niezbędnego do wytworzenia danej wielkości produkcji (przy danych cenach czynników) i kosztu rzeczywiście poniesionego. Pomiar i analiza efektywności kosztowej może być ważnym narzędziem pomocniczym w zarządzaniu i polityce ekonomicznej, gdyż informuje jaki jest rząd wielkości możliwych do uzyskania oszczędności (możliwego zwiększenia zysku) przy zachowaniu danej skali działalności firm czy całej branży.

Podstawy obecnie stosowanej ekonometrycznej metodologii badania efektywności (technicznej lub kosztowej) stworzyły przed dwudziestu laty dwa zespoły badawcze: Aigner, Lovell i Schmidt [1] oraz Meeusen i van den Broeck [30], którzy zaproponowali tzw. stochastyczne modele graniczne (ang. *stochastic frontier models*). Są to modele jednorównaniowe, składające się z odpowiednio wyspecyfikowanej mikroekonomicznej funkcji produkcji lub kosztów (dla logarytmów tych zmiennych) oraz dwóch składników losowych, z których jeden (symetryczny względem zera) odzwierciedla efekt czynników przypadkowych i błędu pomiaru, zaś drugi (asymetryczny i stałego znaku) modeluje potencjalną nieefektywność. Dalszego rozwoju tej metodologii, prezentowanej głównie na łamach *Journal of Econometrics*, dokonali m. in. Stevenson [40], Pitt i Lee [36], Jondrow, Lovell, Materov i Schmidt [22], Schmidt i Sickles [38], Beckers i Hammond [4], Greene [17], van den Broeck, Koop, Osiewalski i Steel [41] oraz Koop, Osiewalski i Steel [24], [25].

Obecnie, w końcu lat 90-tych, ekonomia światowa zna wiele obszarów zastosowania stochastycznych modeli granicznych. Jednym z nich jest zagadnienie efektywności kosztowej banków, analizowane od kilku lat w czołowej specjalistycznej literaturze zachodniej, głównie na łamach *Journal of Banking and Finance*, *Journal of Money, Credit and Banking* oraz *Journal of Productivity Analysis* (zob. [3],[7],[9],[14],[23],[29],[31], [43]). Podkreślić należy, iż bank jest przedsiębiorstwem bardzo specyficznym, w przypadku którego ściśle określenie

produktów oraz czynników produkcji i ich cen - a tym samym budowa funkcji kosztów - jest zagadnieniem subtelnym i budzącym kontrowersje (por. Sealey i Lindley [39] oraz Humphrey [20]).

W niniejszej pracy zostaną pokazane podstawowe metody pomiaru efektywności kosztowej w sektorze bankowym oparte na technikach ekonometrycznychⁱⁱ. Naszym celem jest przygotowanie podstaw dla empirycznych badań efektywności kosztowej banków polskich. Część następną (druga) przedstawia mikroekonomiczną motywację rozważanych modeli efektywnościowych (granicznych). Część trzecia omawia najprostsze techniki stosowane w przypadku danych przekrojowych. Część czwarta prezentuje prosty model dla danych przekrojowo-czasowych, które umożliwiają bardziej precyzyjny szacunek efektywności niż dane przekrojowe. Część piąta omawia specyfikację funkcji kosztów dla sektora bankowego, zwracając szczególną uwagę na problemy z definiowaniem produktów i czynników produkcji. Część szósta zawiera uwagi końcowe.

2. Mikroekonomiczne podstawy analizy efektywności kosztowej

Jednym z podstawowych problemów rozważanych w teorii mikroekonomii jest problem maksymalizacji zysku firmy rozumianego jako różnica między uzyskanym przychodem a poniesionym kosztem. W celu rozwiązania problemu maksymalizacji zysku (przy danych cenach czynników produkcji i produktów) można najpierw rozpatrywać zagadnienie minimalizacji kosztów produkcji, a następnie zagadnienie wyboru takiego poziomu produkcji, który jest najbardziej zyskowy. Minimalizacja kosztów produkcji jest warunkiem koniecznym dla maksymalizacji zysku. Rozwiązanie problemu minimalizacji kosztu formułuje się w języku mikroekonomii następująco: poszukuje się takiego punktu na izokwancie (powierzchni jednakowej produkcji), któremu odpowiada możliwie najniższa izokosta (płaszczyzna jednakowego kosztu) z nim związana (por. [42]).

Jeżeli przedsiębiorstwo ponosi większy koszt niż wynika on z mikroekonomicznej (granicznej) funkcji kosztu (ang. *frontier cost function*), to przyczyną tej sytuacji jest nieefektywność kosztowa - alokacyjna lub techniczna.

Można pokazać, że odchylenie rzeczywiście poniesionego kosztu od granicznej funkcji kosztu jest rezultatem błędu alokacji lub nieefektywności technicznej. Rysunek 1 przedstawia graficzną dekompozycję efektywności kosztowej na techniczną i alokacyjną (poczynione założenia: jeden produkt, dwa czynniki produkcji, ceny są na ustalonym

poziomie). Przez $Z^{opt} = (x_1^{opt}, x_2^{opt})$ oznaczono optymalne nakłady obu czynników produkcji, które przy danych cenach czynników gwarantują uzyskanie produkcji na poziomie y^{obs} po najniższym koszcie C^{min} . Natomiast $Z^{obs} = (x_1^{obs}, x_2^{obs})$ oznacza obserwowane nakłady, przy których uzyskano produkcję y^{obs} , ponosząc koszt C^{obs} . Przypomnijmy, że izokwanta $\{(x_1, x_2): f(x_1, x_2) = y^{obs}, f\text{-funkcja produkcji}\}$ jest zbiorem takich kombinacji nakładów, które są technicznie niezbędne do uzyskania produkcji y^{obs} . Widoczna na rysunku nieefektywność techniczna polega na tym, że Z^{obs} leży powyżej izokwenty y^{obs} . Można więc tę samą produkcję y^{obs} uzyskać przez proporcjonalną (tj. nie zmieniającą struktury) redukcję nakładów do punktu Z^{tech} i obniżenie kosztu do C^{tech} . Różnica między C^{obs} i C^{tech} jest kosztem nieefektywności technicznej. Nieefektywność alokacyjna polega na tym, że struktura nakładów Z^{obs} i Z^{tech} nie odpowiada relacji cen czynników produkcji; produkcję y^{obs} można uzyskać taniej (po koszcie $C^{min} < C^{tech}$) przez zastosowanie optymalnej kombinacji Z^{opt} . Podsumowując, miarą efektywności alokacyjnej jest więc stosunek odcinków OA/OB, a technicznej OB/OC. Efektywność kosztowa to $OA/OC = (OA/OB) * (OB/OC)$, czyli iloczyn obu mierników cząstkowych; por. Kopp i Diewert [26]. Na przykład: efektywność techniczna rzędu 0.8 i efektywność alokacyjna rzędu 0.9 prowadzi do efektywności kosztowej 0.72 (koszt niezbędny stanowi 72% kosztu poniesionego).

Analiza efektywności kosztowej firm pozwala zbadać czy firma przy danych cenach czynników produkcji ponosi minimalny koszt całkowity wytworzenia określonego poziomu produkcji. Innymi słowy, badamy czy dana wielkość produkcji została osiągnięta przy odpowiedniej skali i strukturze tych czynników. Jeżeli ten warunek jest spełniony, to firma wytwarzając optymalną wielkość produkcji (gwarantującą maksymalny zysk) osiąga ją przy odpowiednich nakładach czynników produkcji (po najniższym koszcie).

W klasycznej analizie efektywności kosztowej firm przyjmuje się kilka podstawowych założeń, i tak:

- zakłada się często (por. np. Schmidt i Sickles [38]), że jedna z badanych firm jest w pełni efektywna, więc mierzy się nieefektywność innych w relacji do tej wyróżnionej firmy;
- każda z firm ma swobodny dostęp do najnowszej myśli technicznej, lub ogólniej formułując, do tej samej technologii. Założenie to pozwala przyjąć dla każdej z firm identyczną postać mikroekonomicznej funkcji produkcji, a w konsekwencji także funkcji kosztów.

Koszt graniczny przy swobodnym dostępie wszystkich firm do tej samej technologii reprezentuje minimalny koszt ponoszony przy danych cenach czynników i danym

(zrealizowanym) poziomie produkcji. Odchylenie *in plus* od granicznej funkcji kosztów interpretowane może być jako błąd pomiaru, który ze swej istoty może być dowolnego znaku (jest zmienną symetryczną względem zera), lub nieefektywność, która jest zawsze zmienną nieujemną.

Główny problem w ekonometrycznej analizie efektywności kosztowej firm sprowadza się do oszacowanie parametrów granicznej funkcji kosztów oraz wskaźnika mierzącego nieefektywność (bądź efektywność). Rodzaj posiadanych danych -przekrojowo—czasowe (panelowe) czy tylko przekrojowe -i specyfikacja nieefektywności są podstawowymi czynnikami decydującymi o wyborze typu modelu i sposobu estymacji (por. np. Fernández, Osiewalski i Steel [13]). Jeżeli występują odpowiednie przesłanki merytoryczne, to zakłada się, że efektywność każdej z firm jest albo stała albo zmienna w czasie. Modele bardziej rozbudowane pozwalają na uwzględnienie i testowanie systematycznych różnic w efektywności, spowodowanych przez czynniki zewnętrzne. Zakłada się w nich, że składniki reprezentujące nieefektywność nie mają identycznych rozkładów dla różnych firm, tzn. mają ten sam typ rozkładu, lecz o różnych parametrach będących funkcją pewnych zmiennych egzogenicznych (por. Kumbhakar, Ghosh i McGuckin [28] oraz Koop, Osiewalski i Steel [25]). Zagadnienie modelowania egzogenicznie uwarunkowanych różnic efektywności kosztowej wykracza poza ramy tej pracy.

Prezentowane w następnych częściach pracy metody (oparte na modelach jednorównaniowych) umożliwiają dokonanie pomiaru efektywności kosztowej firm, nie prowadzą jednak do jej dekompozycji na składową techniczną i alokacyjną.

3. Model dla danych przekrojowych

Najprostszy jednorównaniowy model stochastycznej granicznej funkcji kosztów firmy może być w przypadku danych przekrojowych zapisany w postaci (por. np. [32] str. 254, [9]):

$$TC_i = f(Q_i, W_i) \exp(\varepsilon_i) , \quad (1)$$

gdzie:

$i=1, \dots, N$ - liczba firm,

TC_i (Total Cost) - obserwowany koszt całkowity i -tej firmy,

Q_i - wektor $G \times 1$ produktów i -tej firmy,

W_i - wektor $H \times 1$ cen czynników produkcji dla firmy i ,

$f(Q_i, W_i)$ - graniczna funkcja kosztów.

Zakłada się, że $\varepsilon_i = u_i + v_i$ oraz że u_i i v_i są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym:

- u_i są to składniki wyrażające nieefektywność badanych firm, o rozkładach niezależnych i o wartościach wyłącznie nieujemnych ($u_i \geq 0$, a zatem $E(u_i) > 0$);
- v_i są to symetryczne składniki losowe wyrażające wpływ czynników przypadkowych bądź błędów w pomiarze kosztów; zakłada się, że posiadają niezależne, identyczne rozkłady o zerowej wartości oczekiwanej, np. $v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$.

Podstawową formą funkcyjną wykorzystywaną w analizie empirycznej jest obecnie translogarytmiczna funkcja kosztów (ang. *translog cost function*). Otrzymuje się ją - dla logarytmu kosztów ($\ln TC$) - poprzez aproksymację II rzędu dowolnej funkcji przynajmniej 3-krotnie różniczkowalnej w otoczeniu pewnego (dobranego arbitralnie) punktu. Jej postać jest następująca:

$$\begin{aligned} \ln TC_i = & \alpha_o + \sum_{g=1}^G \beta_g^{(1)} * \ln Q_{i,g} + \sum_{h=1}^H \beta_h^{(2)} * \ln W_{i,h} + \\ & + \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^H \beta_{g,h}^{(3)} * \ln Q_{i,g} * \ln W_{i,h} + \sum_{g=1}^G \sum_{j=1}^G \beta_{g,j}^{(4)} * \ln Q_{i,g} * \ln Q_{i,j} \\ & + \sum_{h=1}^H \sum_{j=1}^H \beta_{h,j}^{(5)} * \ln W_{i,h} * \ln W_{i,j} + \varepsilon_i \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie o ε_i czyni się założenia identyczne jak w równaniu (1).

Własność jednorodności funkcji kosztów ze względu na ceny czynników produkcji nakłada następujące restrykcje na parametry równania (2):

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^H \beta_h^{(2)} &= 1 \\ \sum_{h=1}^H \beta_{g,h}^{(3)} &= 0 \quad \text{dla } g = 1, \dots, G \\ \sum_{j=1}^H \beta_{h,j}^{(5)} &= 0 \quad \text{dla } h = 1, \dots, H \end{aligned}$$

Ponadto, zgodnie z twierdzeniem Youngaⁱⁱⁱ $\beta_{g,j}^{(4)} = \beta_{j,g}^{(4)}$, i $\beta_{h,j}^{(5)} = \beta_{j,h}^{(5)}$, co dodatkowo ogranicza liczbę swobodnych parametrów.

Jeżeli w równaniu (2) uwzględnimy powyższe symetrie oraz koszt całkowity (TC) i ceny W_h ($h=1, \dots, H$) wydzielimy przez jedną z nich (np. W_H), to własność jednorodności względem cen jest automatycznie spełniona. Model przyjmuje wówczas postać równoważną:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{TC_i}{W_{i,H}}\right) &= \alpha_o + \sum_{g=1}^G \beta_g^{(1)} * \ln(Q_{i,g}) + \sum_{h=1}^{H-1} \beta_h^{(2)} * \ln\left(\frac{W_{i,h}}{W_{i,H}}\right) + \\ &+ \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^{H-1} \beta_{g,h}^{(3)} * \ln Q_{i,g} * \ln\left(\frac{W_{i,h}}{W_{i,H}}\right) + \sum_{g=1}^G \sum_{j=g}^G \beta_{g,j}^{(4)} * \ln Q_{i,g} * \ln Q_{i,j} \\ &+ \sum_{h=1}^{H-1} \sum_{j=h}^{H-1} \beta_{h,j}^{(5)} * \ln\left(\frac{W_{i,h}}{W_{i,H}}\right) * \ln\left(\frac{W_{i,j}}{W_{i,H}}\right) + \varepsilon_i \end{aligned} \quad (3)$$

W efekcie liczba estymowanych parametrów z wyjątkiem wyrazu wolnego α_0 wynosi $k=(G+H-1)(G+H+2)/2$.

W przypadku danych przekrojowych, najprostszą metodą estymacji modelu (3) wydaje się Metoda Najmniejszych Kwadratów (MNK). Należy jednak pamiętać, że ε_i ma rozkład, który nie jest rozkładem normalnym, ani nawet rozkładem symetrycznym. Co najważniejsze, wartość oczekiwana złożonego składnika losowego jest niezerowa: $E(\varepsilon_i)=E(v_i)+E(u_i)=E(u_i)>0$. Jeżeli jednak wartości oczekiwane zmiennych u_i są identyczne, to przyjmując oznaczenia $E(u_i)=\mu$, $\alpha_\mu=\alpha_0+\mu$ oraz $\varepsilon_{\mu,i}=\varepsilon_i-\mu$, otrzymujemy równoważny modelowi (3) zapis, w którym wyrazem wolnym jest α_μ zaś składnikiem losowym $\varepsilon_{\mu,i}$. Ponieważ $E(\varepsilon_{\mu,i})=E(\varepsilon_i)-\mu=E(u_i)-\mu=0$, więc - przy standardowych założeniach o zmiennych objaśniających - estymator MNK wektora zawierającego α_μ i wszystkie współczynniki $\beta^{(l)}$ funkcji translogarytmicznej ($l=1,\dots,5$) jest estymatorem (przynajmniej) zgodnym. Uzasadnione jest więc wykorzystanie MNK do estymacji modelu (3), przy czym niezbędna jest korekta oceny wyrazu wolnego, gdyż w sposób zgodny szacujemy $\alpha_\mu=\alpha_0+\mu$, nie α_0 .

Zgodność estymatora MNK wszystkich współczynników funkcji kosztów poza wyrazem wolnym jest podstawą różnych wariantów estymacji granicznej funkcji kosztów i wskaźników efektywności kosztowej. Warianty te nazywane są ogólnie skorygowaną MNK (ang. *corrected ordinary least squares; COLS*). Omówimy jedynie wariant najprostszy.

Po zastosowaniu MNK wyznacza się reszty $\hat{\varepsilon}_{\mu,i} = \ln CT_i - \ln \hat{CT}_i$. Firmę, dla której reszta $\hat{\varepsilon}_{\mu,i}$ jest minimalna przyjmuje się jako w pełni efektywną (jako wzorzec efektywności). Z uwagi na rozważanie logarytmu funkcji kosztów, efektywność i—tej firmy na skali (0,1] mierzy się następująco (wektor $\hat{\beta}$ zawiera wszystkie oszacowania parametrów łącznie z oceną wyrazu wolnego α_μ):

$$\hat{r}_{ef,i} = \frac{f(Q_i, w_{i1}, \dots, w_{iH}, \hat{\beta}) \exp(\min_j(\hat{\varepsilon}_{\mu,j}))}{f(Q_i, w_{i1}, \dots, w_{iH}, \hat{\beta}) \exp(\hat{\varepsilon}_{\mu,i})} = \exp\left(\min_j(\hat{\varepsilon}_{\mu,j}) - \hat{\varepsilon}_{\mu,i}\right).$$

Graficzną ilustrację tej metody przedstawia Rysunek 2 (przyjęte założenia: jeden produkt Q; ceny czynników produkcji są ustalone dla wszystkich firm, mamy więc do czynienia z krzywą kosztu całkowitego). Oszacowana przy pomocy MNK na podstawie punktów empirycznych krzywa kosztów, tzw. przeciętna krzywa kosztów (linia gruba) po przesunięciu wzdłuż osi rzędnych o wektor $(0; \min_j(\hat{\varepsilon}_{\mu,j}))$ tworzy graniczną funkcję kosztów (linia przerywana) z wyrazem wolnym $\alpha_0 = \alpha_\mu + \min_j(\hat{\varepsilon}_{\mu,j})$. Efektywność kosztową można przedstawić jako stosunek minimalnego kosztu niezbędnego (wynikającego z granicznej funkcji kosztów) do kosztu rzeczywiście poniesionego przy tym samym poziomie produkcji.

Przedstawiona metoda estymacji wskaźników efektywności jest wrażliwa na obserwacje nietypowe i intuicyjnie powinna dawać tym lepsze wyniki im mniejsze są symetryczne zakłócenia losowe (błąd pomiaru); pierwotnie była ona zaproponowana dla tzw. deterministycznych funkcji granicznych gdzie $v_i \equiv 0$; por. Greene [16]. Metoda ta nie wykorzystuje w sposób jawny informacji o złożonym składniku $\varepsilon_i = v_i + u_i$, a zwłaszcza o rozkładzie jego składowej u_i . Nie są znane własności stochastyczne oszacowań efektywności uzyskanych tym uproszczonym sposobem, można więc traktować go jedynie jako podejście wstępne. Jondrow, Lovell, Materov i Schmidt [22] opracowali bardziej zaawansowaną metodę oceny wskaźników efektywności, w której wykorzystuje się warunkową wartość oczekiwaną $E(u_i | \varepsilon_i)$ przy założeniu normalności v_i i określonego typu rozkładu u_i (np. ucięty normalny lub wykładniczy). Pełne wnioskowanie o indywidualnej efektywności firm jest jednak możliwe dopiero na gruncie bayesowskim, co przedstawiają van den Broeck, Koop, Osiewalski i Steel [41].

W przypadku danych przekrojowych nie można oczywiście badać zmian efektywności (nieefektywności) firm w czasie, co jest teoretycznie możliwe (choć rzadko praktykowane) w przypadku danych przekrojowo–czasowych, omawianym w następnej części.

4. Model dla danych przekrojowo–czasowych

W przypadku danych przekrojowo–czasowych (panelowych; ang. *panel data*) w równaniu (2) należy przyjąć, że TC_i , $W_{i,h}$, $Q_{i,g}$ są wektorami $T \times 1$ obserwacji dla i -tej firmy.

Natomiast ε_i o wymiarze $T \times 1$ jest (inaczej niż zostało to ujęte w równaniach (1)-(3)), sumą składników v_i i z_i , gdzie z_i jest wektorem losowym o nieujemnych współrzędnych $z_{i,t}$ (odzwierciedlających nieefektywność firm w kolejnych okresach czasu $t=1, \dots, T$), a $v_i \sim N(0, \sigma_v^2 I_T)$ dla $i=1, \dots, N$. Częstym założeniem (przyjmowanym zwłaszcza przy małym T) jest nie tylko stałość technologii, ale i stałość efektywności firmy w czasie. Umożliwia to bardziej precyzyjny szacunek przeciętnej efektywności każdej firmy, gdyż mamy dla niej T obserwacji, a nie tylko jedną.

Wygodnie jest więc w celu omówienia najprostszych metod estymacji dla danych przekrojowo-czasowych ograniczyć się do założenia stałości efektywności firmy w czasie ($z_{it}=u_i$ dla $t=1, \dots, T$) Można wtedy zapisać translogarytmiczną funkcję kosztów w formie:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{TC_{i,t}}{W_{i,H,t}}\right) &= \alpha_o + \sum_{g=1}^G \beta_g^{(1)} * \ln(Q_{i,g,t}) + \sum_{h=1}^{H-1} \beta_h^{(2)} * \ln\left(\frac{W_{i,h,t}}{W_{i,H,t}}\right) + \\ &+ \sum_{g=1}^G \sum_{h=1}^{H-1} \beta_{g,h}^{(3)} * \ln(Q_{i,g,t}) * \ln\left(\frac{W_{i,h,t}}{W_{i,H,t}}\right) + \sum_{g=1}^G \sum_{j=g}^G \beta_{g,j}^{(4)} * \ln(Q_{i,g,t}) * \ln(Q_{i,j,t}) \quad (4) \\ &+ \sum_{h=1}^{H-1} \sum_{j=h}^{H-1} \beta_{h,j}^{(5)} * \ln\left(\frac{W_{i,h,t}}{W_{i,H,t}}\right) * \ln\left(\frac{W_{i,j,t}}{W_{i,H,t}}\right) + \varepsilon_{i,t}, \end{aligned}$$

gdzie $\varepsilon_{i,t} = u_i + v_{i,t}$.

Grupując obserwacje dla poszczególnych firm (po czasie) otrzymuje się model liniowy:

$$y_i = (\alpha_0 + u_i) \mathbf{1}_T + X_i \beta + v_i \quad (i=1, \dots, N) \quad (5)$$

gdzie y_i jest wektorem $T \times 1$ obserwowanych wartości logarytmu kosztu dla i -tej firmy, X_i jest macierzą $T \times k$ zmiennych objaśniających, $\mathbf{1}_T$ jest wektorem $T \times 1$ złożonym z jedynek.

Najprostszy sposób estymacji równania (5) przedstawili Schmidt i Sickles w pracy [38]. Zauważyli, że skoro $E(u_i) = \mu > 0$ w modelu $y_{it} = \alpha_0 + X_{it}\beta + u_i + v_{it}$, to dla modelu $y_{it} = (\alpha_0 + \mu) + X_{it}\beta + (u_i - \mu + v_{it})$ składnik losowy $u_i - \mu + v_{it}$ ma wartość oczekiwaną zero. Nie zalecają jednak estymacji tego modelu zwykłą MNK. Estymator MNK parametrów $\alpha_\mu = \alpha_0 + \mu$ i β jest co prawda zgodny (jeżeli N dąży do ∞ i jeżeli u_i są nieskorelowane z regresorami X_{it}), ale istnieją metody efektywniejsze. W konsekwencji autorzy ci proponują traktować u_i jako nieznaną stałą (tzw. efekt indywidualny) i estymować w równaniu (5) obok k parametrów przy regresorach także N wyrazów wolnych α_i zdefiniowanych jako $\alpha_i = \alpha_0 + u_i$, które rozróżniają indywidualną efektywność kosztową firm. Szacowanie $k+N$ parametrów odbywa się na podstawie $T \times N$ obserwacji. Estymacja modelu, w którym występują wyrazy wolne (α_i)

różne dla każdej z firm, polega na zastosowaniu MNK z uwzględnieniem w zbiorze zmiennych objaśniających dodatkowych $N-1$ zmiennych zero—jedynekowych obok stałej α_0 . Równoważną algebraicznie jest procedura estymacji równania, w którym wartość każdej ze zmiennych: objaśnianej i objaśniających (np. $y_{i,t}$) zastępuje się odchyleniem od średniej po czasie (wyrażeniem $y_{i,t} - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_{i,t}$). W literaturze estymator ten jest znany jako *within estimator*. Dla wektora β , jest on zgodny w obu przypadkach: $N \rightarrow \infty$, $T \rightarrow \infty$. Natomiast dla wyrazów wolnych α_i estymator ten jest zgodny wraz ze wzrostem liczby obserwacji po czasie dla każdej firmy (a więc tylko przy $T \rightarrow \infty$). Ponieważ proponowany model ma być wykorzystywany jedynie przy małym T , więc własności asymptotyczne związane ze wzrostem liczby okresów czasu nie mają dla nas praktycznego znaczenia.

Po dokonaniu estymacji parametrów przyjmuje się $\hat{u}_i = \hat{\alpha}_i - \hat{\alpha}$, gdzie $\hat{\alpha}_i$ jest oszacowaniem stałej odpowiadającej i -tej firmie a $\hat{\alpha} = \min_j(\hat{\alpha}_j)$, jako ocenę wskaźnika nieefektywności u_i (określonego na skali $[0, +\infty)$). Miernikiem efektywności na skali $(0, 1]$ jest:

$$\hat{r}_{ef,i} = \frac{f(Q_i, w_{i1}, \dots, w_{iH}, \hat{\beta}) \exp(\hat{\alpha} + \hat{v}_i)}{f(Q_i, w_{i1}, \dots, w_{iH}, \hat{\beta}) \exp(\hat{\alpha}_i + \hat{v}_i)} = \exp(-\hat{u}_i).$$

Tak zdefiniowany miernik zakłada, że firma o najmniejszym $\hat{\alpha}_i$ jest w pełni efektywna a nieefektywność pozostałych firm jest mierzona w relacji do niej. Dla estymatora wskaźnika nieefektywności, określenie jego błędu oszacowania na gruncie teorii klasycznej jest bardzo trudne (możliwe jedynie poprzez symulacje komputerowe). Graficznie tę metodę estymacji wskaźników efektywności opisuje Rysunek 3.

Koop, Osiewalski i Steel [25] wykazali, że estymacja wskaźnika efektywności dla danych przekrojowo-czasowych za pomocą *within estimator* odpowiada wnioskowaniu bayesowskiemu, w którym przyjmuje się bardzo silną wiedzę wstępną o wysokiej względnej nieefektywności firm (mierzonej względem firmy najefektywniejszej). Wiedzę tę można opisać formalnie za pomocą niewłaściwego rozkładu a priori postaci $p(r_i) \propto 1/r_i$ gdzie $r_i = \exp(-\alpha_i + \min_j(\alpha_j))$, a zatem $r_i \in (0, 1]$. Rozkład ten ma następujące własności: szansa a priori, że firmy są bardzo nieefektywne (r_i bliskie 0) jest nieskończenie wielka, natomiast że są bardzo efektywne (r_i bliskie 1) jest tylko skończona. Należy się więc spodziewać, że zaprezentowana metoda nie doszacowuje w skończonych próbach względnej efektywności firm (rozrzut efektywności między firmą—wzorcem a pozostałymi firmami jest zbyt duży).

Stosując *within estimator* nie wykorzystujemy założenia o postaci rozkładu u_i ; dla

konkretnych typów rozkładów nieefektywności i przy założeniu normalności błędu symetrycznego v_i proponuje się w literaturze metodę największej wiarygodności (zob. Pitt i Lee [36] oraz Schmidt i Sickles [38]) oraz wnioskowanie bayesowskie (zob. Koop, Osiewalski i Steel [25]). Szczególnie to ostatnie podejście wydaje się naturalne w przypadku szacowania efektywności; wymaga ono jednak nowoczesnych technik Monte Carlo do obliczania gęstości brzegowych i momentów rozkładu a posteriori (zob. Osiewalski i Steel [35]).

Posiadanie danych panelowych o dużym interwale czasowym, np. jeden rok, i dłuższym horyzoncie T pozwala założyć, że efektywność firm jest zmienna w czasie (por. Cornwell, Schmidt i Sickles [10] oraz Kumbhakar [27]). Jeżeli przyjmiemy dodatkowe założenie, że z_{it} są niezależnymi zmiennymi losowymi dla $i=1,\dots,N$, i $t=1,\dots,T$, to nie nakładamy na dane żadnej struktury przekrojowo—czasowej i najprostszy sposób estymacji wskaźników efektywności jest identyczny jak w przypadku danych przekrojowych, czyli dla równania (3). Wskaźniki w liczbie $T*N$, oszacowane na podstawie $T*N$ obserwacji, charakteryzują efektywność każdej z firm w kolejnych badanych okresach. Grupując je po firmach można ponadto uzyskać dodatkowe informacje o średniej efektywności firm w okresie, z którego pochodzi próba. Oczywiście, do tego sposobu estymacji należy odnieść te same uwagi krytyczne co w przypadku estymacji w oparciu o dane przekrojowe: szacunek pojedynczego wskaźnika efektywności oparty jest w zasadzie na jednej obserwacji.

Fernández, Osiewalski i Steel [13] omawiają typy struktur możliwych do rozważania w przypadku danych przekrojo—czasowych i podstawowe problemy wnioskowania bayesowskiego na podstawie takich modeli granicznych.

5. Funkcja kosztów w przypadku sektora bankowego

Przedstawioną metodologię badania efektywności kosztowej firm można stosować w odniesieniu do banków i innych instytucji finansowych. Jednym z problemów pojawiających się na etapie budowy funkcji kosztów jest określenie zmiennych wchodzących do modelu, czyli czynników produkcji i ich cen oraz produktów firmy jaką jest bank. Czynniki produkcji pojawiają się w modelu pośrednio: ich zaangażowanie określa koszt całkowity.

Rozwój badań empirycznych z zakresu analizy efektywności kosztowej sektora bankowego (od początku lat 90-tych) poprzedzony był pracami teoretycznymi podejmującymi problem określenia (zdefiniowania) czynników produkcji i produktów instytucji finansowych w świetle mikroekonomicznej teorii produkcji (np. Sealey i Lindley [39]). W efekcie, badacze zajmujący się tą problematyką zgodnie przyjmują za czynniki produkcji (np.

[2],[6],[7],[9],[11],[12],[15],[19],[21],[23], [31],[33]):

- kapitał fizyczny (physical capital)-majątek trwały,
- kapitał ludzki (labor),
- kapitał finansowy (financial capital)-depozyty i inne pożyczone pieniądze.

Cenę czynnika produkcji wyznacza się w ten sposób, że jest ona ilorazem kosztu związanego z danym czynnikiem i wielkości jego zaangażowania. Zgodnie z tą koncepcją, cenę kapitału ludzkiego wyznacza się jako stosunek wynagrodzenia (wraz z narzutami) pracowników banku do liczby zatrudnionych (w przeliczeniu na pełne etaty). Cena kapitału finansowego to stosunek kosztów odsetkowych od depozytów (i innych pożyczonych pieniędzy) do wielkości tych depozytów. Pomiar ceny kapitału fizycznego jest już trudniejszy; w wielu pracach autorzy nie przytaczają przyjętej definicji ceny tego czynnika. W innych pracach z tego zakresu cenę kapitału fizycznego proponuje się mierzyć jako np. średni koszt wynajmu powierzchni biurowej w geograficznym sąsiedztwie banku (np. [8], [21]). Jednak najczęściej w praktyce przyjmuje się iloraz wydatków związanych z kapitałem fizycznym i albo wartości tego kapitału (np. [6], [9],[15],[19],[23],[33]), albo wielkości udzielonych depozytów i innych pożyczonych pieniędzy (np. [14],[11]).

Koszt całkowity (TC) jest sumą poniesionych kosztów związanych z zaangażowaniem każdego z czynników produkcji: kapitału fizycznego, ludzkiego i finansowego.

Jak dotąd badacze nie wypracowali wspólnego podejścia do problemu określenia produktów bankowych. Istnieją dwa główne podejścia różniące się generalnie ujęciem roli depozytów. W pierwszym z nich (tzw. *real approach*), traktującym bank jako firmę produkcyjną, za produkty uważa się kredyty i inne należności generujące dochód (*earning assets*), a depozyty i inne zobowiązania traktuje się tylko jako czynniki produkcji (np. [2],[9],[12],[19],[23],[31],[33],[34]).

Alternatywne podejście (tzw. *portfolio approach*) zakłada, że depozyty podobnie jak *earning assets* muszą być definiowane jako produkty (np. [5],[6],[7],[8],[11],[15],[18],[21],[29], [37],[43]).

Niezależnie od przyjętej roli depozytów badacze dokonują różnych klasyfikacji produktów (przede wszystkim kredytów), zwykle agregując je tak, że ich liczba nie przekracza pięć. Można zauważyć, że rozważając 5 produktów i 3 ceny czynników produkcji dla translogarytmicznej funkcji kosztów estymowana liczba parametrów wynosi 35 (bez stałych).

Prezentując różne klasyfikacje produktów wprowadzone w pracach empirycznych z

zakresu analizy kosztowej sektora bankowego można zauważyć, że np. Mester [31] oraz English, Grosskopf, Hayes i Yaiswarng [12], za pracą Sealeya i Lindleya [39] zgodnie przyjmując podejście *real approach*, rozważają jako produkty: kredyty hipoteczne (*real estate mortgage loans*), kredyty konsumpcyjne i kredyty kasowe dla przedsiębiorstw (*consumer and commercial loans*), gwarancje, poręczenia i inne należności od podmiotów finansowych (*securities and other investments, assets in trading accounts*). Noulas, Subhash i Miller [34] oraz Kaparakis, Miller i Noulas [23] wyodrębniają dodatkowo z wyżej wymienionych produktów kredyty dla indywidualnych gospodarstw domowych i osób fizycznych, traktując je jako odrębną kategorię. Natomiast Akhaiven, Swamy, Taubman i Singamsetti [2] agregują produkty bankowe do dwóch: kredytów ratalnych (*installment loans*) oraz innych, zawierających m. in. kredyty kasowe dla przedsiębiorstw, kredyty hipoteczne, faktoring i kredyt z tytułu leasingu (*industrial loans*).

Stosując alternatywne podejście (*portfolio approach*), Berger i Humphrey [7] oraz McAllister i McManus [29] traktują depozyty na żądanie (*demand deposits*), depozyty terminowe i wkłady oszczędnościowe (*time and savings deposits*) jak produkty bankowe tak samo jak kredyty ratalne, kredyty hipoteczne, faktoring i kredyt z tytułu leasingu oraz kredyty kasowe dla przedsiębiorstw. Podobny podział stosują Rangan, Grabowski, Aly i Pasurka [37], lecz nie wyodrębniają kredytów ratalnych, a osobną kategorią produktów są dla nich kredyty konsumpcyjne.

Kredyty hipoteczne, kredyty kasowe, z tytułu leasingu i faktoring dla przedsiębiorstw, kredyt konsumpcyjny, gwarancje, poręczenia i inne należności od podmiotów finansowych oraz depozyty na żądanie stanowią produkty dla takich autorów jak Hassan, Grabowski, Pasurka i Ragan [18] oraz Grabowski, Ragan i Rezvanian [15].

Dostęp do danych porównywalnych między badanymi obiektami ma wpływ na klasyfikację produktów; i tak w pracy z zakresu badań efektywności skandynawskiego sektora bankowego Berg, Forsund, Hjalmarsson i Souminen [5] dokonali klasyfikacji produktów umożliwiającą ich porównywalność, wyróżniając: liczbę oddziałów poszczególnych banków, wartość kredytów ogółem (z wyłączeniem udzielonych instytucjom finansowym) oraz depozyty ogółem (z wyłączeniem udzielonych instytucjom finansowym). Zardokoohi i Kolari [43] również używają jako produktów wielkości zagregowanych, a mianowicie: kredytów i depozytów ogółem.

Inaczej niż inni badacze, Ferrier i Lovell [14] oraz Berger, Hanweck i Humphrey [8] zaproponowali, żeby produkt bankowy mierzyć za pomocą ilości lokat na żądanie, lokat terminowych, ilości udzielonych kredytów hipotecznych, ratalnych i kasowych.

Autorzy wymienionych prac dokonując klasyfikacji produktów opierają się w większości na danych pochodzących z sektora banków i instytucji finansowych gospodarki amerykańskiej. Dane te gromadzone są przez specjalne instytucje powołane do tego przez bank centralny (Federal Reserve). Pochodzą one z banków o różnej wielkości i skali działania (Kaparakis, Miller i Noulas [23] opierają się na próbie 5 548 banków, z których najmniejsze posiadają aktywa o wartości 50 mln, a największe powyżej 10 000 mln dolarów USA), stąd często dokonuje się pomiaru efektywności kosztowej dla grup jednorodnych banków, jak to czynią autorzy prac [6],[7],[11],[12],[15],[21],[23],[33],[34],[37],[43], dla których wielkość aktywów banku jest kryterium podziału. Hassan, Grabowski, Pasurka i Ragan [18] dzielą banki na dwie grupy: posiadające i nie posiadające oddziałów.

Przy próbie zastosowania przedstawionej metodologii pomiaru efektywności kosztowej w warunkach polskich, zasadniczymi problemami wydają się być: określenie produktów (w zgodzie zarówno z naszymi realiami jak i wypracowaną na Zachodzie metodologią) oraz dostęp do porównywalnych danych o polskich bankach.

Głównymi kryteriami decydującymi o klasyfikacji produktów kredytowych mogą być: czas trwania i cel umowy finansowej (kredytowej), typ zabezpieczenia, osoba wierzyciela, sposób oprocentowania lub sposób wypłaty i spłaty kredytu. Te czynniki będą podstawą do określenia kategorii produktów w warunkach polskiej bankowości - zwłaszcza, że wachlarz usług bankowych, z których korzystają klienci polskich banków, różni się od oferty produktowej banków amerykańskich. Zagadnienie określenia produktów bankowych, czynników produkcji i ich cen w przypadku polskiego sektora bankowego stanowi przedmiot odrębnych studiów.

6. Uwagi końcowe

Przedstawiony zarys metodologii wskazuje na możliwość podjęcia pierwszych empirycznych badań efektywności kosztowej w polskim sektorze bankowym. Konieczna będzie taka specyfikacja zmiennych w granicznej funkcji kosztów, która odpowiada zarówno jednej z koncepcji teoretycznych banku jako firmy, jak i polskiej sprawozdawczości i rachunkowości bankowej. Co do postaci analitycznej modelu, to wystarczająca wydaje się funkcja translogarytmiczna, stosowana w wielu badaniach zachodnich. Wykorzystanie danych przekrojowo-czasowych o dość krótkim interwale czasowym (np. kwartał) i niewielkiej liczbie okresów (małe T) powinny umożliwić precyzyjny szacunek

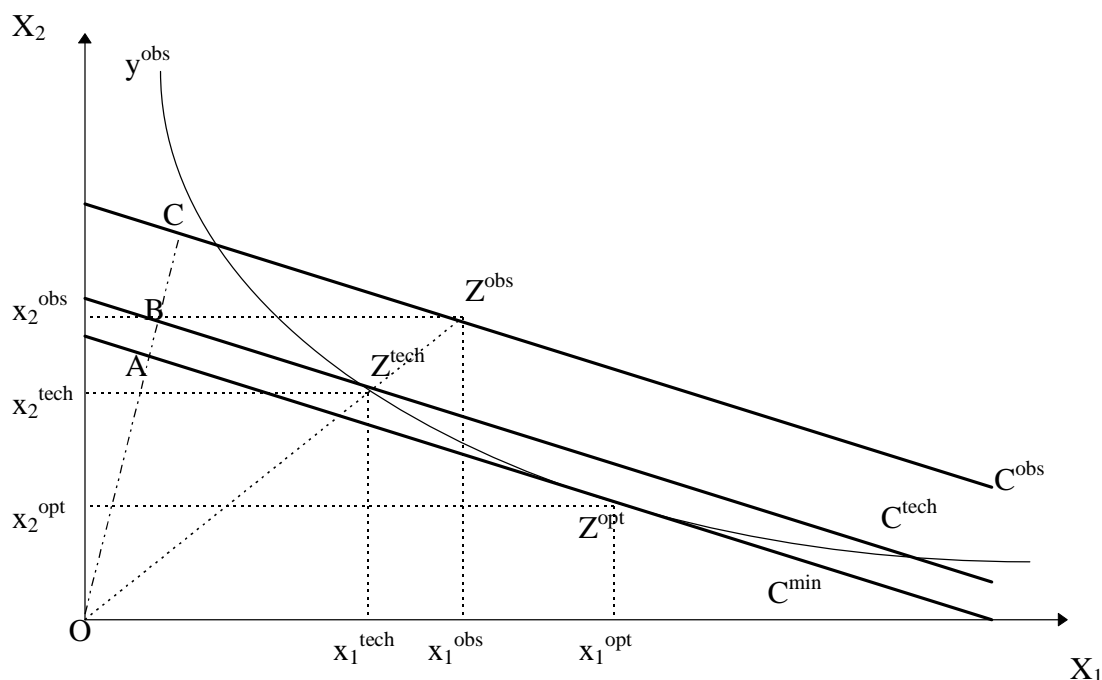
nieefektywności traktowanej jako stały w czasie efekt indywidualny. Zaprezentowane w tej pracy najprostsze techniki estymacji, stanowiące modyfikacje zwykłej MNK, mogą służyć jedynie jako metody wstępne. W dalszych badaniach zamierzamy wykorzystać wnioskowanie bayesowskie, dające pełny obraz niepewności o parametrach funkcji kosztów i o wskaźnikach efektywności, a zastosowane z powodzeniem w analizie efektywności kosztowej szpitali amerykańskich (por. [25]).

Bibliografia

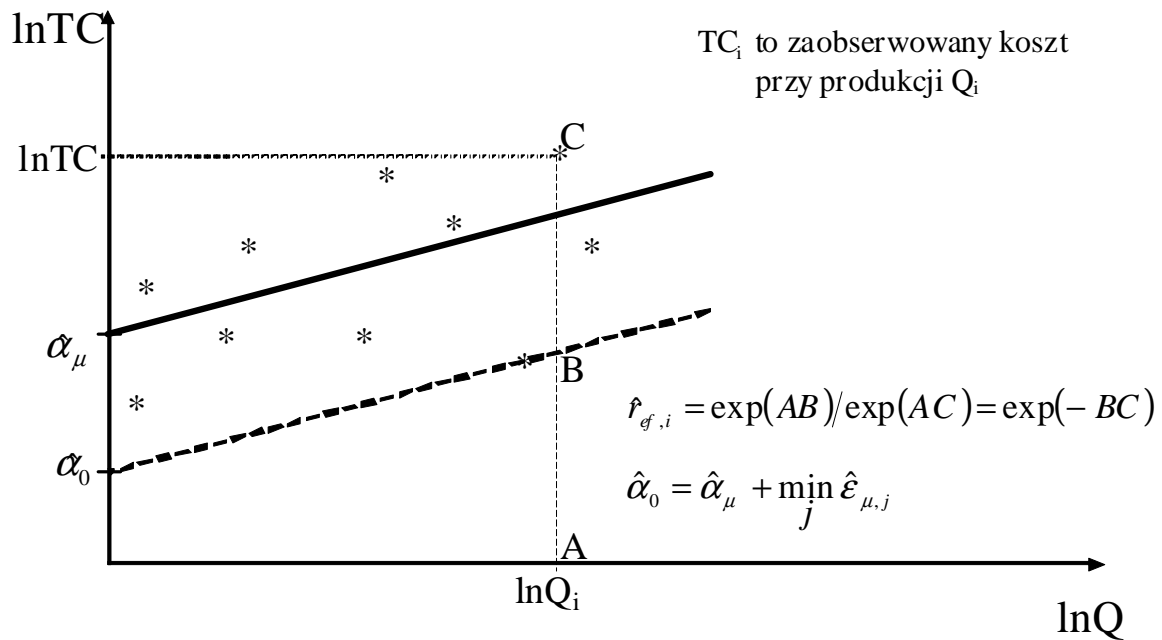
- [1] Aigner D., C.A.K. Lovell, P. Schmidt, 1977, „Formulation and Estimation of Stochastic Frontier Production Function Models”, *Journal of Econometrics*, 6.
- [2] Akhainen J., P.A.V.B. Swamy, S.B. Taubman, R.N. Singamsetti, 1997, „A general method of deriving the inefficiencies of bank from a profit function”, *The Journal of Productivity Analysis*, 8.
- [3] Bauer P.W., D. Hancock, 1993, „The efficiency of the Federal Reserve in providing check processing services”, *Journal of Banking and Finance*, 17.
- [4] Beckers D.E., C.J. Hammond, 1987, „A tractable likelihood function for the normal-gamma stochastic frontier model”, *Economics Letters*, 24.
- [5] Berg S.A, F.R. Forsund, L. Hjalmarsson, M. Souminen, 1993, „Banking efficiency in the Nordic countries”, *Journal of Banking and Finance*, 17.
- [6] Berger A. N., 1993, „‘Distribution-free’ estimates of efficiency in the U.S. banking industry and tests of the standard distributional assumptions”, *The Journal of Productivity Analysis*, 4.
- [7] Berger A. N., D. Humphrey, 1991, „The dominance of inefficiencies over scale and product mix economies in banking”, *Journal of Monetary Economics*, 28.
- [8] Berger A. N., G. Hanweck, D. Humphrey, 1987, „Competitive viability in banking. Scale, scope, and mix economies”, *Journal of Monetary Economics*, 20.
- [9] Cebenoyan A.S., E.S. Cooperman, C.A. Register, S.C. Hudgins, 1993, „The relative efficiency of stock versus Mutual S&Ls: A stochastic cost frontier approach”, *Journal of Financial Services Research*.
- [10] Cornwell C., P. Schmidt, R. Sickles, 1990, „Production frontiers with-cross-sectional and time-series variation in efficiency levels”, *Journal of Econometrics*, 46.
- [11] Dietsch M., 1993, „Economies of scale and scope in French commercial banking industry”, *Journal of Productivity Analysis*, 4.
- [12] English M., S. Grosskopf, K. Hayes., S. Yaiswarng, 1993, „Output allocative and technical efficiency of banks”, *Journal of Banking and Finance*, 17.
- [13] Fernández C., J. Osiewalski, M.F.J. Steel, 1997, „On the use of panel data in stochastic frontier models with improper priors”, *Journal of Econometrics*, 79.
- [14] Ferrier G.D., C.A.K. Lovell, 1990, „Measuring cost efficiency in banking: econometric and linear programming evidence”, *Journal of Econometrics*, 46.

- [15] Grabowski R., N. Ragan, R. Rezvanian, 1993, „Organizational forms in banking: An empirical investigation of cost efficiency”, *Journal of Banking and Finance*, 17.
- [16] Greene W., 1980, „Maximum likelihood estimation of econometric frontier functions”, *Journal of Econometrics*, 13.
- [17] Greene W., 1990, „A gamma-distributed stochastic frontier model”, *Journal of Econometrics*, 46.
- [18] Hassan Y.A., Grabowski R., C. Pasurka, N. Ragan, 1990, „Technical, scale, and allocative efficiencies in U.S. banking: An empirical investigation”, *Review of Economics and Statistics*.
- [19] Hughes J., L.J. Mester, 1993, „A quality and risk-adjusted cost function for banks: Evidence on the „too-big-to-fail” doctrine”, *Journal of Productivity Analysis*, 4.
- [20] Humphrey D., 1985, „Costs and scale economies in bank intermediation”, w: *Handbook of Banking Strategy* (red.: R.C. Aspinwall, R. Eisenbeis), J. Wiley, New York.
- [21] Humphrey D., 1993, „Cost and technical change: Effects from bank deregulation”, *Journal of Productivity Analysis*, 4.
- [22] Jondrow J., C.A.K. Lovell, I. Materov, P. Schmidt, 1982, „On the estimation of technical inefficiency in the stochastic frontier production function model”, *Journal of Econometrics*, 19.
- [23] Kaparakis E., S. M. Miller, A.G. Noulas, 1994, „Short-run cost inefficiency of commercial banks: A flexible stochastic frontier approach”, *Journal of Money, Credit, and Banking*, 26.
- [24] Koop G., J. Osiewalski, M.F.J Steel, 1994, „Bayesian efficiency analysis with a flexible form: The AIM cost function”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 12.
- [25] Koop G., J. Osiewalski, M.F.J Steel, 1997, „Hospital efficiency analysis with individual effects: A Bayesian approach”, *Journal of Econometrics*, 76.
- [26] Kopp R., W.E. Diewert, 1982, „The decomposition of frontier cost function deviations into measures of technical and allocative inefficiency”, *Journal of Econometrics*, 19.
- [27] Kumbhakar S.C., 1990, „Production frontiers, panel data, and time-varying technical inefficiency”, *Journal of Econometrics*, 46.
- [28] Kumbhakar S.C., S. Ghosh, J.T. McGuckin, 1991, „A generalized production frontier approach for estimating determinants of inefficiency in U.S. dairy farms”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 9.
- [29] McAllister P.H., D. McManus, 1993, „Resolving the scale efficiency puzzle in banking”, *Journal of Banking and Finance*, 17.
- [30] Meeusen W., J. van den Broeck, 1977, „Efficiency Estimation from Cobb-Douglas Production Functions with Composed Error”, *International Economic Review*, 1977, 8.
- [31] Mester L.J., 1993, „Efficiency in the savings and loan industry”, *Journal of Banking and Finance*, 17.
- [32] Molyneux P., Y. Altunbas, E. Gardener, 1996, *Efficiency in European Banking*, J. Wiley, Chichester.
- [33] Muldur U., Sassenou M., 1993, „Economies of scale and scope in French banking and savings insitutions”, *Journal of Productivity Analysis*, 4.

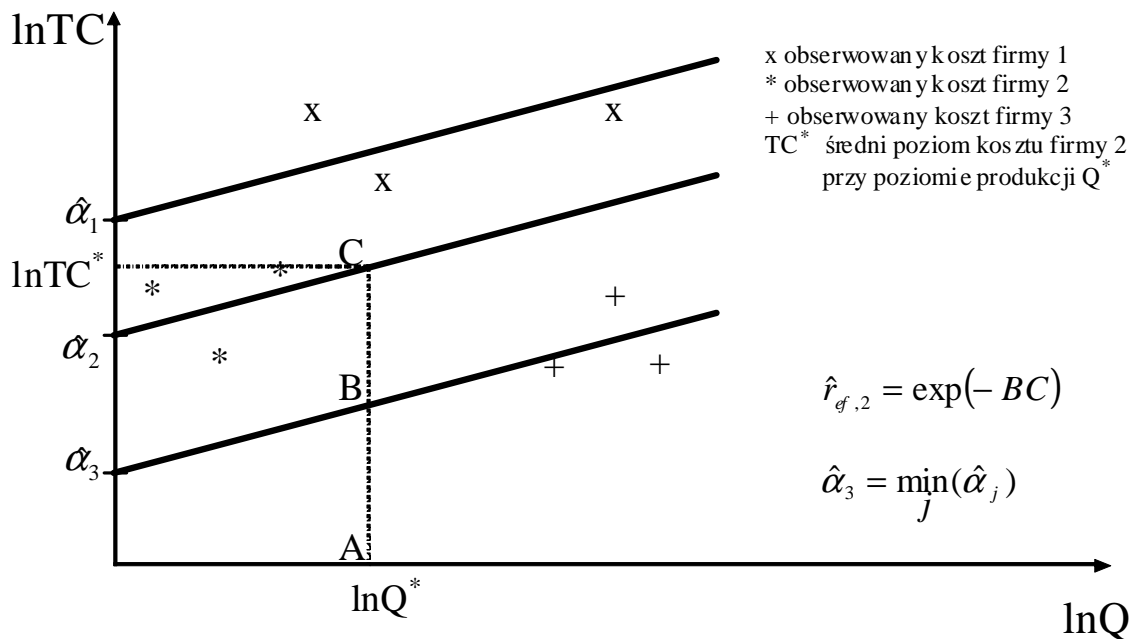
- [34] Noulas A.G., C.R. Subhash, S.M. Miller, 1990, „Returns to scale and input substitution for large U.S. banks”, *Journal of Money, Credit, and Banking*, 22.
- [35] Osiewalski J., M.F.J. Steel, (1998), „Numerical tools for the Bayesian analysis of stochastic frontier models”, *Journal of Productivity Analysis*, 9, w druku.
- [36] Pitt M., L.F. Lee, 1981, „The measurement and sources of technical inefficiency in the Indonesian weaving industry”, *Journal of Development Economics*, 9.
- [37] Rangan N., R. Grabowski, N.Y. Aly, C. Pasurka, 1988, „The technical efficiency of US Banks”, *Economics Letters*, 28.
- [38] Schmidt P., R. Sickles, 1984, „Production frontiers and panel data”, *Journal of Business and Economic Statistics*, 2.
- [39] Sealey C.W., J.T. Lindley, 1977, „Inputs, outputs, and a theory of production and cost at depository financial institutions”, *The Journal of Finance*, 32.
- [40] Stevenson R.E., 1980, „Likelihood functions for generalized stochastic frontier estimation”, *Journal of Econometrics*, 13.
- [41] van den Broeck J., G. Koop, J. Osiewalski, M.F.J. Steel, 1994, „Stochastic frontier models: A Bayesian perspective”, *Journal of Econometrics*, 61.
- [42] Varian H.R., 1995, *Mikroekonomia*, Wydawnictwo Naukowe PWN.
- [43] Zardokoohi A., J. Kolari, 1994, „Branch office economies of scale and scope: Evidence from savings banks in Finland”, *Journal of Banking and Finance*, 18.



Rysunek 1. Nieefektywność kosztowa i jej dekompozycja.



Rysunek 2. Wyznaczanie wskaźnika efektywności na podstawie danych przekrojowych - skorygowana MNK.



Rysunek 3. Wyznaczanie wskaźnika efektywności na podstawie danych panelowych: zindywidualizowane wyrazy wolne.

Przypisy

ⁱ Praca wykonana w ramach projektu badawczego nr 1-H02B-015-11, finansowanego przez Komitet Badań Naukowych.

ⁱⁱ stosuje się także metody oparte na technikach programowania liniowego zob. np. Ferrier i Lovell [14] oraz Bauer i Hancock [3].

ⁱⁱⁱ wynika z niego w szczególności, że jeżeli funkcja f jest 2-krotnie różniczkowalna w pewnym punkcie i pochodne 2-go rzędu są ciągłe, to macierz pochodnych 2-go rzędu w tym punkcie jest macierzą symetryczną.