

### Zadanie 1. [Rozkład wykładniczy]

W pewnej centrali telefonicznej odnotowano następujące długości czasu ( $y_t$ , w minutach) pomiędzy kolejnymi połączeniami:

4,88; 0,62; 6,18; 0,04; 2,74; 0,15; 0,79; 0,94; 0,76; 2,04; 0,05; 0,85.

Przyjmując, że powyższe obserwacje stanowią próbę losową prostą z rozkładu wykładniczego o parametrze  $\lambda$ , przeprowadź wnioskowanie bayesowskie dla omawianego zagadnienia:<sup>1</sup>

- Zapisz model próbkowy.
- Jako rozkład *a priori* przyjmij rozkład gamma ( $\lambda \sim G(a, b)$ ) o takich hiperparametrach  $a, b > 0$ , że wartość oczekiwana i odchylenie standardowe *a priori* parametru  $\lambda$  są równe i wynoszą 5, tj.  $E(\lambda) = D(\lambda) = 5$ .

*Wskazówka:* Potrzebne informacje znajdziesz w materiale „Rozkład gamma” na Moodle.

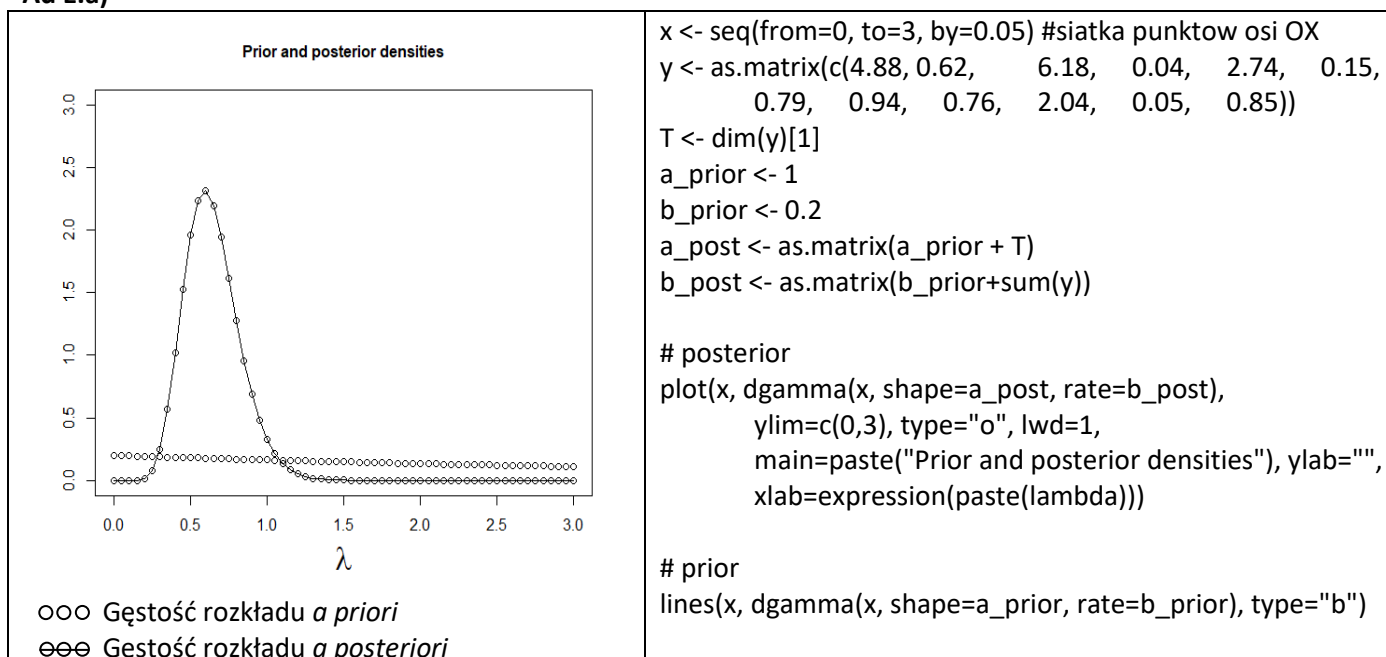
- Zapisz model bayesowski.
- Wyznacz rozkład *a posteriori* parametru  $\lambda$ .
- Dokonaj analizy rozkładu *a posteriori* parametru  $\lambda$  (oczywiście, na tle rozkładu *a priori*). W tym celu wykorzystaj charakterystyki stosownych rozkładów:
  - wykresy funkcji gęstości – powinny wyjść Państwu takie, jak na wykresie u dołu tej strony (Uwaga: Koniecznie zapoznaj się z przypisem 1 w materiale „Rozkład gamma”).
  - wartości oczekiwane,
  - modalne,
  - mediany,
  - odchylenia standardowe,
  - 90%-wy kwantylowy przedział wiarygodności *a posteriori*.

Uwaga 1: Pokuś się o jakieś krótkie komentarze do otrzymanych wyników.

Uwaga 2: Czy w uzyskanym rozkładzie *a posteriori* dałoby się wyznaczyć krótszy przedział (w porównaniu do tego z polecenia E.f), który także z 90%-wym prawdopodobieństwem zawierałby w sobie prawdziwą wartość parametru  $\lambda$ ? (Jeśli tak, to jak nazywałby się taki przedział?) Odpowiedź uzasadnij.

- Jakie są szanse (przed i po wglądzie w dane), że wartość parametru  $\lambda$  przekracza 0,5?
- Dokonaj analizy rozkładu *a posteriori* (na tle rozkładu *a priori*) przeciętnego czasu pomiędzy kolejnymi połączeniami (czyli  $E(y_t|\lambda) = 1/\lambda$ ). Jakie jest prawdopodobieństwo (po wglądzie w dane), że oczekiwany czas dwoma kolejnymi połączeniami przekracza 2 minuty?

#### Ad E.a)



<sup>1</sup> Funkcja gęstości rozkładu wykładniczego o parametrze  $\lambda > 0$  przyjmuje postać:  $f_{Exp}(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $x \geq 0$ .