**Część 1. Iloczyn kartezjański. Relacje**



**Symbolika:** **Kwantyfikatory:** $\exists$ istnieje $\forall$ dla każdego

**Przedziały:** (... , ...) przedział otwarty [... , ...] przedział domknięty

## 1.1. Elementy logiki

**Symbole logiczne:**

$\vee$ alternatywa ($p \vee q$ oznacza: $p$ **lub** $q$)

$\wedge$ koniunkcja ($p \wedge q$ oznacza: $p$ **i** $q$)

$\sim$ negacja ($\sim p$ oznacza: **nieprawda, że** $p$)

$\Longrightarrow$ implikacja ($p \Longrightarrow q$ oznacza: **jeżeli** $p$ **to** $q$)

$\Longleftrightarrow$ równoważność ($p \Longleftrightarrow q$ oznacza: $p$ **wtedy i tylko wtedy**, gdy $q$)

**Zastosowanie:**

**1)** definicje $\boldsymbol{p \Longleftrightarrow q}$ $(\boldsymbol{co\ definiujemy}) \Longleftrightarrow (\boldsymbol{jak\ definiujemy})$

**2)** twierdzenia

* $\boldsymbol{p \Longleftrightarrow q}$ $p$ jest warunkiem koniecznym i wystarczającym (**WKW**) $q$
$q$ jest warunkiem koniecznym i wystarczającym $p$

* $\boldsymbol{p \Longrightarrow q}$ $q$ jest wnioskiem z założenia $p$
$p$ jest założeniem, $q$ jest tezą twierdzenia
$q$ jest warunkiem koniecznym (**WK**) $p$
$p$ jest warunkiem wystarczającym (**WW**) $q$

**Przykład** Jeżeli $x, y \in \mathbb{N}$ są liczbami parzystymi, to $x + y$ jest liczbą parzystą.

## 1.2. Podstawowe działania na zbiorach.

**Przypomnienie ze szkoły:**

+, - działania algebraiczne (na liczbach)

$\cup, \cap$ działania mnogościowe (na zbiorach)

$A, B \subset X, X \neq \emptyset$

**Suma zbiorów** $A$ i $B$: $A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$.

**Iloczyn (przecięcie)** zbiorów $A$ i $B$: $A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$.

**Różnica** zbiorów $A$ i $B$: $A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$.

**Dopełnienie** zbioru $A$ (w przestrzeni $X$): $A' = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$.

## 1.3. Iloczyn kartezjański (produkt kartezjański) – definicja

Niech dany będzie zbiór $A \neq \emptyset$, $a, b \in A$

**Definicja 1.1.** $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ para uporządkowana (ważna kolejność)

różnica między parą a zbiorem: zbiór $\{a; b\} = \{b; a\}$
para $(a, b) \neq (b, a)$; $(a, b) = (b, a) \Leftrightarrow a = b$

**Definicja 1.2.** Niech dane będą zbiory $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$.
$A \times B = \{(a, b)\colon\ a \in A \ \wedge\ b \in B\}$ - **iloczyn kartezjański** (produkt kartezjański) = zbiór wszystkich par $(a, b)$, z których pierwszy element należy do zbioru $A$, a drugi do zbioru $B$

**Przykład 1.1** Wyznaczyć $A \times B$, $B \times A$, $A^2$ gdzie:
**1)** $A = \{-1;\ 2;\ 3\}$, $B = \{2;\ 5\}$; **2)** A = (- ∝, 1] B = (2, 5]

**Rozwiazanie:**

**Uwaga**

- $(a, b) \in A \times B \Leftrightarrow a \in A \ \wedge\ b \in B$,
- $A \times A = A^2$,
- $A \times B \times C = \{(a, b, c)\ \colon\ a \in A \ \wedge\ b \in B \ \wedge\ c \in C\}$, $(a, b, c)$ trójka uporządkowana,
- $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)\ \colon\ a_i \in A_i \ dla\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ iloczyn kartezjański $n$ zbiorów, gdzie $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jest $n$ *−elementowym* wektorem (ciągiem),
- dla $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = A^n$.

**Uwaga**

- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y)\ \colon\ x \in \mathbb{R} \ \wedge\ y \in \mathbb{R}\}$ dwuwymiarowa przestrzeń rzeczywista,
- $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z)\ \colon\ x \in \mathbb{R}\ \ y \in \mathbb{R} \ \wedge\ z \in \mathbb{R}\}$ trójwymiarowa przestrzeń rzeczywista,
- $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \colon\ x_i \in \mathbb{R}\ \ dla\ \ i \in \{1, \ldots, n\},\ n \in \mathbb{N}\}$
  $n$ −wymiarowa przestrzeń rzeczywista (zbiór $n -$ elementowych ciągów liczbowych).

## 1.4. Relacje – definicja, podstawowe własności

Relacja – dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego

Niech $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$.

**Definicja 1.3.** $S$ jest **relacją dwuargumentową** ze zbioru $X$ w zbiór $Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S$ jest podzbiorem iloczynu kartezjańskiego zbiorów $X$ i $Y$ ($S \subset X \times Y$).

**Przykład 1.2**

**1)** $A = \{-1;\ 2;\ 3\}, B = \{2;\ 5\}$;

$S_1 = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.\,.\dots.\}$, $S_2 = \{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.\dots\dots\dots.\}$,

**2)** $S_3 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\quad xSy \iff 2x - y = 1$

**3)** $X$ – zbiór kobiet, $Y$ zbiór mężczyzn $S_4$ – relacja małżeństwa,

**Symbolika:** $(x, y) \in S \iff xSy$ oznacza "$x$ jest w relacji $S$ z $y$".

**Definicja 1.4.** $S \subset X \times Y$

**1⁰** Dziedzina relacji $D_S = \{x \in X\ :\ \exists y \in Y \quad xSy\} \subset X$.

**2⁰** Przeciwdziedzina relacji $D_S^{-1} = \{y \in Y\ :\ \exists x \in X\ \ xSy\} \subset Y$.

**Przykład 1.3** Wyznaczyć $D_S$ oraz $D_S^{-1}$ dla relacji z przykładu 1.2.

**Definicja 1.5.** $S^{-1} \subset Y \times X$ jest **relacją odwrotną** do relacji $S \subset X \times Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall x \in X\ \forall y \in Y\colon \quad [(y, x) \in S^{-1} \iff (x, y) \in S].$$

**Przykład 1.4** Wyznaczyć relacje odwrotne dla relacji $S_1$ $i$ $S_3$.

**Uwaga** Każdą relację da się odwrócić

## 1.5. Odwzorowania (funkcje)

Niech $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$, $\quad f \subset X \times Y$

$f \subset X \times Y \quad D_f \subset X \quad \mathrm{D}_f^{-1} \subset Y$

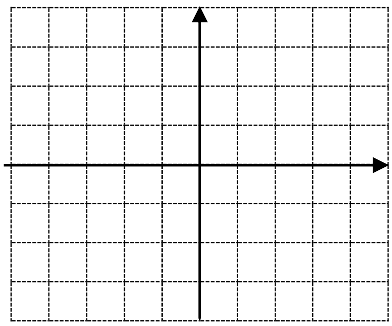
**Definicja 1.6.** Mówimy, że relacja $f$ jest **odwzorowaniem** zbioru $X$ w zbiór $Y \Leftrightarrow f$ każdemu elementowi ze zbioru $X$ przyporządkowuje tylko jeden element ze zbioru $Y \Leftrightarrow$
1) $\forall x \in X \quad \exists y \in Y$
2) $\forall x \in X \quad \forall y_1, y_2 \in Y \quad [(xfy_1 \wedge xfy_2) \Rightarrow y_1 = y_2]$

***Symbolika :*** $xfy \Leftrightarrow (x,y) \in f \Leftrightarrow y = f(x)$
$f \subset X \times Y \Leftrightarrow f : X \to Y$
$X \subset \mathbb{R},\ Y \subset \mathbb{R},\ f : D_f \to \mathbb{R}$ ***funkcja*** (jednej zmiennej)

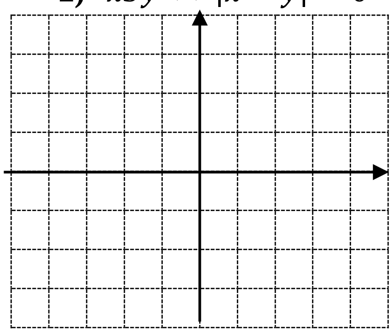
***Uwaga:*** $f$ - **funkcja** $\Leftrightarrow$ 1) $X = D_f \subset \mathbb{R}$
2) $\forall x \in D_f \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \quad y_1 = f(x) \wedge y_2 = f(x) \Rightarrow y_1 = y_2$

**Przykład 1.5** Narysować wykres relacji $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Zbadać która relacja jest funkcją.

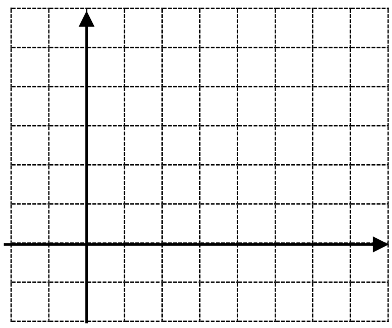
**1)** $xSy \Leftrightarrow |x| = |y|$



**2)** $xSy \Leftrightarrow |x - y| = 0$



**3)** $xSy \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$



## 1.6. Odwracanie funkcji

**Definicja 1.7.** Niech $f : X \to Y$ jest funkcją.
Relację $f^{-1} : Y \to X$ nazywamy **funkcją odwrotną** do *f*, jeżeli $f^{-1}$ jest funkcją.

***Uwaga:*** Nie każda funkcja jest odwracalna.

Jeżeli $f^{-1}$ jest funkcją odwrotną do $f$, to [$\forall$ x$\in$ X $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$

**Przykład 1.6** Wyznaczyć funkcję odwrotną $f^{-1}$ (jeśli istnieje):

1) $f(x) = ax + b,\ a \neq 0,\ D_f = \mathbb{R},\ D_f^{-1} = \mathbb{R}$,

2) $f(x) = a^x,\ a \in (0,1) \cup (1, +\infty),\ D_f = \mathbb{R},\ D_f^{-1} = (0, +\infty)$,

3) $f(x) = \log_a x,\ a \in (0,1) \cup (1, +\infty),\ D_f = (0, +\infty),\ D_f^{-1} = \mathbb{R}$.

**Uwaga:** Wykresy funkcji $f(x)$ oraz $f^{-1}(x)$ są symetryczne do siebie względem prostej $y = x$.

## 1.7. Rodzaje odwzorowań.

$f : X \to Y$ odwzorowanie

W zależności od rodzajów zbiorów X i Y odwzorowanie *f* nazywamy:

1) ***Ciągiem*** nieskończonym, jeżeli $X = \mathbb{N}$ lub skończonym, gdy $X = \{1, 2, .., k\}$.
2) ***Funkcją jednej zmiennej*** rzeczywistej, gdy $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$ (funkcje elementarne)
3) ***Funkcją n zmiennych*** rzeczywistych, gdy $X = \mathbb{R}^n$.
4) ***Funkcją wektorową***, gdy $Y = \mathbb{R}^n$
5) ***Funkcjonałem***, gdy $X$ jest zbiorem funkcji $Y$ jest zbiorem liczb (np. stopień wielomianu)
6) ***Operatorem***, gdy $X$ i $Y$ są zbiorami funkcji (pochodna funkcji)

**Funkcje elementarne:**

**1.** *Funkcja liniowa*: $f(x) = ax + b,\ x \in \mathbb{R}$ (postać kierunkowa), gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.
**2.** *Funkcja kwadratowa*: $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ b, c \in \mathbb{R}$.
**3.** *Wielomian* stopnia $n$ zmiennej $x$:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

**4.** *Funkcja wymierna* (iloraz dwóch wielomianów): $R(x) = \frac{P(x)}{S(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$
**5.** *Funkcja homograficzna*: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.
**6.** *Funkcje trygonometryczne*:
- Funkcja sinus $f(x) = \sin x$.
- Funkcja cosinus: $f(x) = \cos x$.
- Funkcja tangens: $f(x) = \mathrm{tg} x$.
- Funkcja cotangens: $f(x) = \mathrm{ctg} x$.

**7.** *Funkcja wykładnicza* (o podstawie $a$): $f(x) = a^x,\ a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$, $x \in \mathbb{R}$.
**8.** *Funkcja logarytmiczna* (o podstawie $a$): $f(x) = \log_a x,\ x \in \mathbb{R}$, gdzie $a \in (0,1) \cup (1, +\infty)$, $x \in (0, +\infty)$.