1.1. Macierze – definicja i rodzaje

Przykład 1.1.

Definicja 1.1. Niech $m, n \in \mathbb{N}$. ***Macierzą*** o m wierszach i n kolumnach nazywamy odwzorowanie $$A : \{1,2,\dots,m\} \times \{1,2,\dots,n\} \to Y$$
$$A : (i,j) \to a_{ij} \in Y$$

Gdy $Y \subset \mathbb{R}$ mówimy o macierzy liczbowej.

$$A = A_{(m,n)} = [a_{ij}] = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow 1-y \quad wiersz \\ \leftarrow 2-gi \quad wiersz \\ \vdots \\ \leftarrow i-ty \ wiersz \\ \vdots \\ \leftarrow m-ty \ wiersz \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 1-a & 2-ga & & j-ta & & n-ta\ kolumna \end{array} & \end{array}$$

- *wiersz macierzy* jest wektorem poziomym macierzy A; $[a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}] = w_i$ jest $i$tym wierszem,
- *kolumna macierzy* jest wektorem pionowym macierzy A; $[a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}] = k_j$ jest jtą kolumną,
- a_{ij} jest *elementem macierzy*,
- każdy element a_{ij} macierzy A ma dwa indeksy: numer wiersza i, oraz numer kolumny j (a_{ij} jest elementem $i$tego wiersza i $j$tej kolumny),
- macierz A posiadająca m wierszy i n kolumn zawiera $m \cdot n$ elementów,
- liczba wierszy oraz liczba kolumn, $m \times n$ nazywane są *wymiarami* macierzy;

Przykład 1.2.

Wybrane rodzaje macierzy

1. Macierz kolumnowa ($m \times 1, n = 1$) $\quad A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ $\quad 3 \times 1.$

   Macierz wierszowa ($1 \times n, m = 1$) $\quad A = [-5 \quad 2 \quad 8 \quad 1]$ $\quad 1 \times 4.$

2. Macierz zerowa $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad 2 \times 3$

3. Macierz kwadratowa ($n = m$) $\quad A = A_{(n,n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $\quad n \times n$

$\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ - przekątna macierzy

4. Macierz diagonalna (przekątniowa)

$$\forall i,j \in \{1,2,\dots,n\};\, i \neq j:\ a_{ij} = 0 \qquad D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad \text{np.} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

5. Macierz jednostkowa $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j \\ 1 & \text{dla } i = j \end{cases}$ $I = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Uwaga: $M_n(\mathbb{R})$ oznacza zbiór macierzy kwadratowych $n \times n$ o elementach ze zbioru $\mathbb{R}$.

$M_{m\times n}(\mathbb{R})$ oznacza zbiór macierzy $m \times n$ o elementach ze zbioru $\mathbb{R}$.

$M(m,n)$ oznacza zbiór macierzy $m \times n$ o elementach z dowolnego zbioru.

1.2. Podstawowe działania na macierzach

1) Mnożenie macierzy przez skalar

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \qquad k \in \mathbb{R} \qquad \Rightarrow \qquad k \cdot A = [k \cdot a_{ij}]_{m\times n}.$$

Przykład 1.3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, $k = 2 \quad \Rightarrow \quad k \cdot A = [\qquad]$

2) Transponowanie

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \quad \Rightarrow \quad A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$$

Przykład 1.4. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = [\qquad]$.

Uwaga Niech $A, B \in M(m,n)$, $I \in M(n,n)$ oraz $k \in \mathbb{R}$. Wtedy:

1. $I^T = I$

2. $(A^T)^T = A$

3. $(k \cdot A)^T = k \cdot A^T$

4. $(A+B)^T = A^T + B^T$

3) Dodawanie (odejmowanie) macierzy

$$A = [a_{ij}]_{m\times n},\quad B = [b_{ij}]_{m\times n} \quad \Rightarrow \quad A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n},\quad A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$$

Przykład 1.5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ Wyznaczyć $A + B, A - B, A + C$.

$A + B = [\qquad]$ $\qquad A - B = [\qquad]$ $\qquad A + C =$

Uwaga Niech $A, B, C, \mathbf{0} \in M(m,n)$. Wtedy:

1. $A + B = B + A$ przemienność dodawania

2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ łączność dodawania

3. $A + \mathbf{0} = A$

4) Mnożenie macierzy

Uwaga: Mnożenie macierzy $A \cdot B$ jest wykonalne wtedy i tylko wtedy, gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B.

Mnożenie macierzy kolumnowej i macierzy wierszowej:

$$A = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1m}]\ (1 \times m), \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} (m \times 1)$$

$$A \cdot B = [c_{11}] \quad (1 \times 1) \quad \text{gdzie} \quad c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + \cdots + a_{1m} \cdot b_{m1}.$$

$$B \cdot A = [c_{ij}] \quad (m \times m) \quad \text{gdzie} \quad c_{ij} = b_{i1} \cdot a_{1i}$$

Diagram Falck'a:

$$\begin{array}{r|l} B = & \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}_{m \times 1} \\ \hline A = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1m}]_{1 \times m} & [c_{11}]_{1 \times 1} = A \cdot B \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} A = & [a_{11} \quad \cdots \quad a_{1j} \quad \cdots \quad a_{1m}]_{1 \times m} \\ \hline B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{i1} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}_{m \times 1} & \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & c_{ij} & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix}_{m \times m} = B \cdot A \end{array}$$

Przykład 1.6. $A = [3 \quad -1 \quad 2 \quad 4]$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ Wyznaczyć iloczyny macierzy $A \cdot B$ oraz $B \cdot A$ (jeśli istnieją).

Mnożenie dwóch dowolnych macierzy:

$A = [a_{ij}]_{m\times p}$ $B = [b_{ij}]_{p\times n}$ $\Longrightarrow$ $A \cdot B = [c_{ij}]_{m\times n}$ gdzie $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \cdots + a_{ip} \cdot b_{pj}$

(c_{ij} jest iloczynem skalarnym $i$tego wiersza macierzy A oraz $j$tej kolumny macierzy B: $c_{ij} = w_i^A \circ k_j^B$).

Diagram Falck'a:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}_{p\times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix}_{m\times p} \qquad \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & \dots & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & c_{ij} & \dots & \dots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} = A \cdot B$$

Przykład 1.7. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.Wyznaczyć iloczyny macierzy $A \cdot B$ oraz $B \cdot A$ (jeśli istnieją).

5) Potęgowanie macierzy

$A \in M_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A$,…. Ogólnie: dla $k \in \mathbb{N}$ $A^{k+1} = A^k \cdot A$, gdzie $A^0 = I_n$.

Przykład 1.8. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ Wyznaczyć A^2 oraz B^2 (jeśli istnieje).

Uwaga Niech $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p\times r}(\mathbb{R})$, $I \in M_n(\mathbb{R})$. Wtedy:

4. $A \cdot B \neq B \cdot A$

5. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ łączność mnożenia macierzy

6. $I \cdot A = A \cdot I = A$

7. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

1.3. Wyznacznik macierzy kwadratowej

Każdej macierzy kwadratowej $A \in M_n(\mathbb{R})$ przyporządkowana jest dokładnie jedna liczba rzeczywista, którą nazywamy jej wyznacznikiem i oznaczamy symbolem:

$$\det A = |A| = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad \det A \in \mathbb{R}$$

Definicja 1.2. **Podwyznacznikiem** lub **minorem** $M_{ij} \in \mathbb{R}$ danego wyznacznika stopnia n-tego (wyznacznika macierzy $A_{n\times n}$) nazywamy taki wyznacznik stopnia $n-1$-szego, który powstanie przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Przykład 1.9. Dany jest wyznacznik macierzy: $detA = \det \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & 8 \end{bmatrix}$.

Wyznaczyć minory: M_{11}, M_{23}, M_{31}.

Definicja 1.3. **Dopełnieniem algebraicznym** $\boldsymbol{d_{ij}}$ elementu $\boldsymbol{a_{ij}}$ macierzy $\boldsymbol{A}$ nazywamy liczbę:

$$D_{ij} = d_{ij} = A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}, \quad \text{gdzie } M_{ij} \text{ jest minorem.}$$

Przykład 1.10. (c.d.) Dany jest wyznacznik macierzy: $detA = \det \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & 8 \end{bmatrix}$

Wyznaczyć dopełnienia algebraiczne elementów: a_{11}, a_{23}, a_{31}.

Uwaga: Macierz D utworzona z wszystkich dopełnień algebraicznych macierzy $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ nazywana jest **macierzą dopełnień algebraicznych**: $D = A^D = \left[d_{ij}\right]_{n\times n}$.

Definicja 1.4. (indukcyjna)

1. $n = 1$ $A = [a_{11}]$ $\det A = a_{11}$

2. $n > 1$ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$

rozwinięcie Laplace'a względem r – tego wiersza:

$$\det A = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rj} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = a_{r1}\cdot d_{r1} + a_{r2}\cdot d_{r2} + \cdots + a_{rn}\cdot d_{rn}$$

rozwinięcie Laplace'a względem r – tej kolumny:

$$\det A = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = a_{1r}\cdot d_{1r} + a_{2r}\cdot d_{2r} + \cdots + a_{nr}\cdot d_{nr}$$

Uwaga

- $n = 2$ $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$
- $n = 3$ (Metoda Sarrusa)

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Przykład 1.11. Obliczyć wyznacznik macierzy: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

Przykład 1.11.c.d. Obliczyć wyznacznik macierzy: $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Własności wyznaczników macierzy $A_{n\times n}$:

1. $\det I = 1$

2. $\det A^T = \det A$

3. $\det(kA) = \mathrm{k}^{\mathrm{n}} \det A$

4. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

5. Wyznacznik ma wartość zero jeżeli:

a) dwa wiersze (dwie kolumny) macierzy są identyczne,

b) co najmniej jeden wiersz (kolumna) składa się z samych zer,

c) dwa wiersze (dwie kolumny) macierzy są proporcjonalne.

6. Wyznacznik macierzy przekatniowej równa się iloczynowi elementów jej głównej przekątnej: $\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$

1.4. Macierz odwrotna

Definicja 1.6. Niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Macierz B nazywamy macierzą odwrotną do macierzy A (elementem odwrotnym względem mnożenia macierzy) jeżeli: $A \cdot B = B \cdot A = I$.
Macierz odwrotną do macierzy A (jeśli istnieje) oznaczamy symbolem A^{-1}.

Uwaga

1. Każda macierz kwadratowa A posiada co najwyżej jedna macierz odwrotną.
2. Macierz kwadratowa A , która posiada macierz odwrotną nazywana jest **odwracalną (**lub **nieosobliwą)**.
3. Nie każda macierz kwadratowa jest odwracalna.
4. $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.
5. Macierz kwadratowa A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$.

➢ Wyznaczanie macierzy odwrotnej - metoda dopełnień algebraicznych

Twierdzenie 1.1. Niech macierz $A \in M_n(\mathbb{R})$ jest odwracalna ($\det A \neq 0$) oraz macierz $D = [d_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ jest macierzą dopełnień algebraicznych elementów macierzy A.
Wtedy macierz odwrotna do macierzy A dana jest wzorem: $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(D)^T$.

Przykład 1.12. Wyznaczyć macierz odwrotną do danej (jeśli istnieje):

$K = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ $L = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

Przykład 1.12. c.d. Wyznaczyć macierz odwrotną do danej (jeśli istnieje):

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Własności macierzy odwrotnej:

Niech $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ są macierzami odwracalnymi ($\det A \neq 0, \det B \neq 0$) oraz $I \in M_n(\mathbb{R})$. Wtedy:

1. $I^{-1} = I$,
2. $(A^{-1})^{-1} = A$,
3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$,
4. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

1.5. Równania macierzowe

Równania macierzowe to równania, w których niewiadomą jest macierz X. W rozwiązaniu równania macierzowego wykorzystywane są podstawowe działania na macierzach. Każde równanie macierzowe typu liniowego można sprowadzić do jednej z poniższych postaci:

1) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ gdzie $A \in M(n,n), B \in M(n,p), detA \neq 0$.

Rozwiązanie: $X = A^{-1} \cdot B$, gdzie $X \in M(n,p)$.

2) $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ gdzie $A \in M(n,n), B \in M(p,n), detA \neq 0$.

Rozwiązanie: $X = B \cdot A^{-1}$, gdzie $X \in M(p,n)$.

3) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ gdzie $A \in M(n,n), B \in M(p,p), C \in M(n,p), detA \neq 0, detB \neq 0$.

Rozwiązanie: $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$ gdzie $X \in M(n,p)$.

4) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ gdzie $B \in M(n,p), A \in M(n,n)\ i\ detA = 0$ lub $A \notin M(n,n)$.

Rozwiązania szukamy poprzez podstawienie postaci ogólnej macierzy X o określonych wymiarach, dla których mnożenie $A \cdot X$ jest wykonalne oraz wymiary otrzymanego iloczynu były takie same jak wymiary macierzy B. Po wykonaniu działań na macierzach rozwiązanie sprowadza się do rozwiązania układu równań liniowych.

Uwaga Równania macierzowe typu 1), 2) i 3) możemy rozwiązać poprzez podstawienie postaci ogólnej macierzy X o określonych wymiarach tak, jak w równaniach typu 4).

Przykład 1.13. Rozwiązać równanie macierzowe wykorzystując macierz odwrotną (jeśli to możliwe):

1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

2) $Y \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = I$

1.6. *** Operacje elementarne na wierszach lub kolumnach

Definicja 1.5. **Operacjami elementarnymi** na wierszach (kolumnach) macierzy nazywamy następujące operacje:

1. przestawienie miejscami dwóch dowolnych wierszy (kolumn) macierzy $(w_i \leftrightarrow w_j)$.

2. pomnożenie dowolnego wiersza (kolumny) przez dowolną liczbę rzeczywistą różną od zera $(kw_i \mapsto w_i')$,

3. dodanie do wiersza (kolumny) innego wiersza (kolumny) pomnożonego przez dowolną liczbę $(w_i + kw_j \mapsto w_i')$.

Własności: Dla macierzy kwadratowej $A \in M_n(\mathbb{R})$:

1. operacja 1 zmienia znak wyznacznika macierzy $(\det A' = -detA)$,
2. operacja 2 zmienia wyznacznika macierzy $(\det A' = kdetA)$,
3. operacja 3 nie zmienia wyznacznika macierzy $(\det A' = detA)$.

Zastosowania:

1. Obliczanie wyznaczników "dużych" macierzy: wykorzystując operację 3 przekształcamy macierz do postaci, która posiada jak najwięcej elementów zerowych.

2. Wyznaczanie macierzy odwrotnej: jeżeli dany ciąg operacji elementarnych sprowadza macierz kwadratową nieosobliwą A do macierzy jednostkowej, to ten sam ciąg operacji elementarnych sprowadza macierz jednostkową do macierzy odwrotnej A^{-1} (uwaga: nie wolno mieszać operacji!).

- **Obliczanie wyznacznika macierzy kwadratowej – metoda operacji elementarnych**

Przykład 1.14. Obliczyć wyznacznik macierzy $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

➢ Wyznaczanie macierzy odwrotnej – metoda operacji elementarnych

Uwaga: Jeżeli dany ciąg operacji elementarnych sprowadza macierz kwadratową nieosobliwą A do macierzy jednostkowej, to ten sam ciąg operacji elementarnych sprowadza macierz jednostkową do macierzy odwrotnej A^{-1} (uwaga: nie wolno mieszać operacji!).

Przykład 1.15. Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy metodą operacji elementarnych:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ detM = -7$$