

Interpretacja ocen parametrów modelu regresji liniowej

➤ Rozważamy ogólny zapis modelu regresji liniowej:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \dots + \beta_K x_{tK} + \varepsilon_t = x_t \beta + \varepsilon_t$$

- y_t – zmienna objaśniana
- $x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tK}$ – zmienne objaśniające (in.: regresory)
- $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_K$ – parametry strukturalne (mogące przyjmować dowolne wartości rzeczywiste)

➤ Interpretacja oceny pojedynczego parametru strukturalnego

- Zanim przejdziemy do ocen parametrów, potrzebujemy zrozumieć, o czym informują nas same parametry modelu regresji, przy czym od razu zaznaczmy, że znaczenie wyrazu wolnego (β_0) jest inne niż pozostałych współczynników ($\beta_1, \dots, \beta_K$). Na początek zajmijmy się tymi drugimi, zaś omówienie wyrazu wolnego zostawimy sobie na koniec
- Zasadniczo, dany współczynnik β_i ($i = 2, 3, \dots, K$) ujmuje/odzwierciedla wpływ stojącej przy nim zmiennej objaśniającej, x_{ti} , na zmienną objaśnianą – w bardzo konkretny sposób, który opisano poniżej.
- Skupmy uwagę na parametrze β_1 (oczywiście, poniższe rozważania dotyczą w równej mierze każdego spośród pozostałych współczynników: $\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_K$)
- Zobaczmy, co się dzieje z równaniem regresji w sytuacji, gdyby założyć, że zmienna x_{t1} (stojąca właśnie przy β_1) wzrasta dokładnie o jeden, czyli o jedną swoją jednostkę (przykładowo, jeśli x_{t1} jest wyrażona w zł, to rozważamy wzrost jej wartości o 1 zł; jeśli zmienna ta jest wyrażona w setkach tys. zł, to wzrost jej wartości o jeden, czyli o jednostkę, oznacza wzrost o 100 000 zł, itd.). Przy tym założymy, że wartości pozostałych zmiennych objaśniających nie ulegają zmianie. Tę nową wartość zmiennej objaśnianej, którą otrzymujemy w wyniku owego jednostkowego wzrostu wartości x_{t1} oznaczmy symbolem y_t' :

$$y_t' = \beta_0 + \beta_1(x_{t1} + 1) + \beta_2 x_{t2} + \dots + \beta_K x_{tK} + \varepsilon_t$$

- Aby przekonać się, czym – w odniesieniu do wartości zmiennej objaśnianej – skutkuje jednostkowy wzrost wartości x_{t1} (przy ustalonych wartościach pozostałych zmiennych objaśniających) obliczmy zwykłą różnicę pomiędzy y_t' i y_t :

$$y_t' - y_t = \beta_1(x_{t1} + 1) - \beta_1 x_{t1} = \beta_1$$

- Zatem: Jeżeli wartość zmiennej x_{t1} wzrosłaby o 1 swoją jednostkę, przy ustalonych wartościach pozostałych zmiennych objaśniających, wówczas wartość zmiennej objaśnianej zmieni się o β_1 swoich jednostek – przy czym jeśli $\beta_1 > 0$, wówczas wartość y_t wzrośnie dokładnie o β_1 jednostek, natomiast gdy $\beta_1 < 0$, wówczas wartość y_t spadnie o $|\beta_1|$ jednostek (musimy tu użyć wartości bezwzględnej, aby uniknąć niepoprawnej językowo sytuacji, w której mówimy np. o spadku o -500 zł → zamiast mówić o spadku o *minus* 500 zł, mówimy po prostu o spadku o 500 zł (czyli o $|-500|$)).
- Przechodząc do interpretacji oceny parametru β_1 , czyli konkretnej wartości liczbowej $\hat{\beta}_1$, zaznaczmy, że ponieważ ocena parametru jest tylko jego *oszacowaniem*, w odróżnieniu od wartości samego parametru jego ocena informuje nas „tylko” o przeciętnej/średniej/spodziewanej/oczekiwanej (a nie dokładnej) zmianie wartości zmiennej objaśnianej y_t (na skutek tego hipotetycznego wzrostu wartości x_{t1} zawsze dokładnie o 1 jednostkę).
- Sformułujmy zatem ogólny szablon interpretacji oceny pojedynczego parametru modelu regresji → **Ramka 1**

Ramka 1: Ogólny schemat interpretacji $\hat{\beta}_i$ (tj. oceny parametru β_i , stojącego przy zmiennej x_{ti} ; $i = 1, 2, \dots, K$)

Jeżeli wartość zmiennej x_{ti} byłaby wyższa o 1 jednostkę (przy ustalonych wartościach pozostałych zmiennych objaśniających), wówczas wartość zmiennej objaśnianej, y_t , wzrosłaby (gdy $\hat{\beta}_i > 0$) / spadłaby (gdy $\hat{\beta}_i < 0$) średnio o $|\hat{\beta}_i|$ jednostek.

Uwagi:

- 1) Co do ostatniego fragmentu powyższego zdania, to w miejsce $|\hat{\beta}_i|$ należy po prostu wstawić uzyskaną wartość oceny parametru β_i – z pominięciem jej znaku (od niego zależy natomiast to, jaki charakter ma spodziewana zmiana wartości y_t : wzrostu czy spadku)
- 2) Zwróćmy raz jeszcze uwagę, że zmiana wartości zmiennej y_t ma charakter tylko orientacyjny, stąd konieczne jest użycie podkreślonego wyrażenia „średnio o” lub synonimów: „przeciętnie” czy „średnio rzecz biorąc”
- 3) Podkreślimy także *tryb przypuszczający*, w jakim sformułowana jest interpretacja („byłaby”, „wzrosłaby”, „spadłaby”). Interpretacje ocen parametrów mają z reguły charakter „gdybania”
- 4) Raz jeszcze podkreślimy, że w interpretacji konieczne jest to wtrącenie/założenie „przy ustalonych wartościach pozostałych zmiennych objaśniających” (z wymienieniem ich „z nazwy”)
- 5) W praktyce, gdy rozważamy jakiś konkretny model, w którym poszczególne jego zmienne posiadają konkretne znaczenie ekonomiczne, formułując interpretacje ocen parametrów należy posługiwać się właśnie tymi znaczeniami zmiennych. Czyli jeśli zmienną objaśnianą jest np. przychód, to w interpretacji nie powiemy „Jeżeli ..., to ~~wartość zmiennej objaśnianej ...~~” tylko → „Jeżeli..., to wysokość przychodu...”

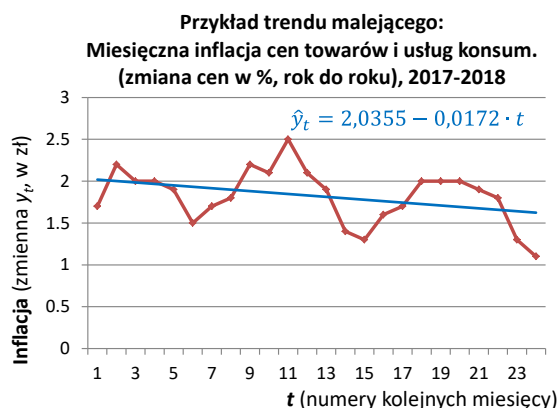
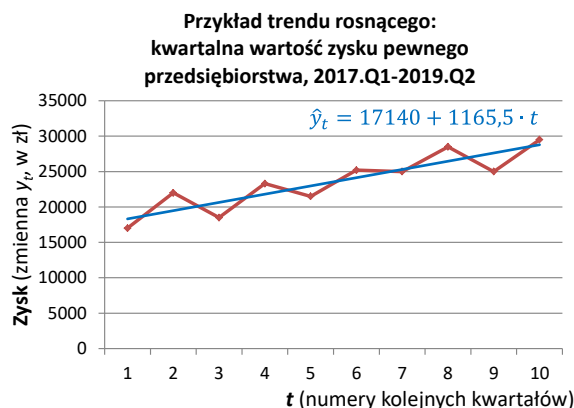
- Powyższy schemat interpretacji oceny pojedynczego parametru regresji jest bardzo ogólny. Praktyce należy go oczywiście dostosować do konkretnego znaczenia zmiennych występujących w modelu. O ile ten powyższy schemat interpretacji jest właściwy dla większości przypadków zmiennych występujących w roli regresorów (czyli zmiennych objaśniających) w modelu ekonometrycznym, o tyle w ramach tego ostatniego nierzadko wykorzystywane są **dwie dość szczególnej postaci zmienne objaśniające**:
 - W przypadku modeli regresji dla danych przekrojowych (czyli obserwacje „po obiektach”) jest to tzw. **zmienna zero-jedynkowa** (inaczej: typu 0-1, dychotomiczna, binarna), która pozwala modelować wpływ takiej cechy „obiektu” na zmienną objaśnianą, która przyjmuje tylko dwie wartości (zwykle kodowane właśnie jako 0 i 1); typowym przykładem takiej zmiennej objaśniającej jest płeć osoby (gdy „objektami” są indywidualni respondenci np. jakiejś ankiety, w której badamy poziom zarobków w grupie losowo wybranych pracowników, wśród których znajdują się zarówno kobiety, jak i mężczyźni)
 - W przypadku modeli regresji dla szeregów czasowych (czyli obserwacje „po czasie”) jest to **trend liniowy**, którego uwzględnienie w modelu ekonometrycznym pozwala „wymodelować” wpływ „zwykłego” upływu czasu na ogólny poziom modelowanego zjawiska (czyli zmiennej objaśnianej); inaczej: pozwala ująć swoisty rozwój zjawiska w czasie – taki, który nie wynika z innych, typowych (zwykle ekonomicznych) zmiennych objaśniających. „Czysty” model trendu liniowego dla pewnej zmiennej objaśnianej wygląda następująco:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t$$

gdzie symbolem „ t ”, jak zawsze, oznaczamy zawsze numery kolejnych obserwacji ($t = 1, 2, \dots, T$) – czyli w przypadku szeregów czasowych: numery kolejnych jednostek czasu, z których pochodzą obserwacje. Zwróćmy uwagę, że t jest tu jedyną zmienną objaśniającą ($x_{t1} = t$) i jako taką określamy ją mianem **zmiennej czasowej**.

Oszacowanie modelu „czystego” trendu liniowego (czyli bez dodatkowych zmiennych objaśniających) odpowiada dopasowaniu prostej do „zwykłego” wykresu liniowego prezentującego szereg czasowy (czyli kształtowanie się) wartości zmiennej y_t w kolejnych jednostkach czasu, czyli dla $t = 1, 2, \dots, T$. Ocena wyrazu wolnego, $\hat{\beta}_0$, jest wysokością przecięcia linii trendu (prostej) z osią OY, natomiast ocena

współczynnika linii trendu, $\hat{\beta}_1$, określa nachylenie tej ostatniej ($\hat{\beta}_1 > 0$ – trend rosnący, $\hat{\beta}_1 < 0$ – trend malejący). Przykłady zaprezentowano na poniższych wykresach.



Zaznaczymy, że w praktyce zwykle rozważa się bardziej rozbudowane modele aniżeli uwzględniające sam tylko trend liniowy, tym samym uwzględniając zmienną czasową t tylko jako jeden z wielu regresorów, którymi w pozostałej mierze są zwykle jakieś zmienne ekonomiczne potencjalnie powiązane ze zmienną objaśnianą (czas, oczywiście, nie jest zmienną ekonomiczną).

- Poniżej omówimy kwestię interpretacji ocen parametrów stojących przy zmiennej zero-jedynkowej i zmiennej czasowej, gdyż wymagają one pewnych modyfikacji ogólnego schematu przedstawionego w Ramce 1.

➤ Interpretacja oceny parametru stojącego przy zmiennej typu 0-1 (w modelach dla danych przekrojowych)

- Załóżmy, że zmienna x_{t1} jest właśnie zmienną typu 0-1, przykładowo określającą płeć osoby (możemy przyjąć, że $x_{t1} = 0$ oznacza mężczyznę, zaś $x_{t1} = 1$ – kobietę). W przypadku zmiennych tego typu raczej „ciężko” mówić o wzroście ich wartości o jednostkę – po pierwsze mamy tylko dwie możliwe wartości (zero i jeden, więc co by oznaczał wzrost o 1 w przypadku obserwacji, dla których $x_{t1} = 1$?), a po drugie raczej też „ciężko” o sensowność posługiwania się w interpretacji oceny parametru kontekstem *zmiany wartości* takiej zmiennej. Przykładowo, mając model, w której y_t oznacza miesięczny przychód pracownika w pewnym przedsiębiorstwie (w złotych); rozważamy kobiety i mężczyzn, zaś zmienna x_{t1} oznacza płeć i otrzymaliśmy ocenę $\hat{\beta}_1 = -100$, to czy sensownie brzmi zdanie: „Jeżeli pracownik będący mężczyzną ($x_{t1} = 0$) stanie się kobietą ($x_{t1} = 1$, czyli nastąpiłby „wzrost” x_{t1} o 1), to jego/jej przychody spadłyby średnio o 100 zł...”? Tak więc... → **Ramka 2**

Ramka 2: Interpretacja $\hat{\beta}_i$ przy zmiennej x_{ti} typu 0-1

W interpretacjach ocen parametrów przy zmiennych binarnych unikamy kontekstu *wzrostu* wartości tej zmiennej o 1, a formułujemy je raczej w kategoriach „statycznych” (czyli nie zmiany). Ścisłej, zmienna typu 0-1 rozróżnia po prostu dwie podgrupy „obiektów” w analizowanym zbiorze danych, zaś ocena parametru przy takiej zmiennej to po prostu przeciętna różnica w wartości zmiennej objaśnianej pomiędzy tymi dwiema podgrupami, przy czym, oczywiście:

- jeżeli $\hat{\beta}_i > 0$, to oznacza to, że w podgrupie „obiektów”, dla których $x_{ti} = 1$ wartość zmiennej objaśnianej jest średnio rzecz biorąc **wyższa** o $\hat{\beta}_i$ jednostek;
- jeżeli $\hat{\beta}_i < 0$, to oznacza to, że w podgrupie „obiektów”, dla których $x_{ti} = 1$ wartość zmiennej objaśnianej jest średnio rzecz biorąc **niższa** o $|\hat{\beta}_i|$ jednostek.

- W rozważanym tu przykładzie grupy pracowników: kobiet i mężczyzn, ocena parametru $\hat{\beta}_1 = -100$ oznacza po prostu, że w analizowanym przedsiębiorstwie kobiety ($x_{t1} = 1$) zarabiają przeciętnie o 100 zł mniej w stosunku do mężczyzn ($x_{t1} = 0$) (oczywiście, gdyby w modelu były obecne jakieś inne zmienne objaśniające, to należałoby

je „zafiksować”, dopisując choćby sformułowanie „przy ustalonych wartościach pozostałych zmiennych objaśniających”). Swoją drogą, taki wynik może sugerować występowanie w owym przedsiębiorstwie niepochlebnego zjawiska dyskryminacji płacowych, choć – jak się tego dowiemy niebawem – należałoby jeszcze przeprowadzić stosowny test statystyczny, który „potwierdziłby”, że sam parametr β_1 (a nie tylko jego ocena) jest istotnie ujemny (bo to, że jego ocena jest ujemna, jeszcze nie oznacza, że prawdziwa wartość parametru – odzwierciedlającego ten prawdziwy związek pomiędzy zmiennymi – jest faktycznie ujemna; znak oceny parametru może być bowiem „dziełem przypadku” i test statystyczny ma właśnie na celu rozstrzygnąć, czy tak jest, czy jednak mamy do czynienia z istotną zależnością).

- Na koniec tej sekcji zastanówmy się jeszcze, co w sytuacji, gdy w modelu, owszem, jest obecna zmienna 0-1, ale interpretujemy ocenę parametru stojącego przy którejś *innej zmiennej*? Wtedy, oczywiście, owa zmienna 0-1 jest jedną z tych, które trzeba „zafiksować”. Jako przykład wyobraźmy sobie, że w rozważanym tu modelu dla y_t – miesięcznej wielkości przychodu pracownika w pewnym przedsiębiorstwie, oprócz płci (x_{t1}) mamy jeszcze zmienną x_{t2} – długość stażu pracy (w pełnych latach):

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \varepsilon_t$$

Wówczas moglibyśmy sformułować następującą interpretację oceny parametru β_2 (stojącego właśnie przy x_{t2}), wynoszącej przykładowo $\hat{\beta}_2 = 200$:

Wraz ze wzrostem długości stażu pracy o rok, miesięczna wielkość przychodu danego pracownika (albo: danej osoby) wzrasta średnio o 200 zł.

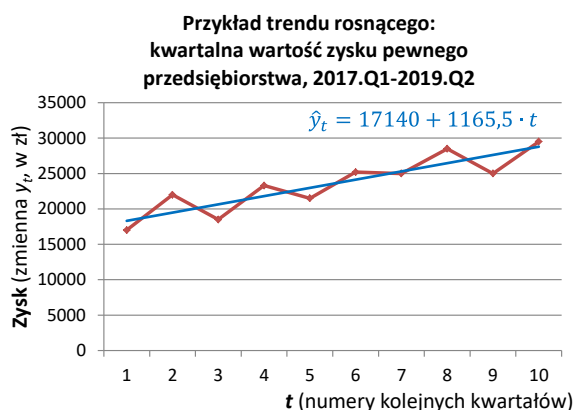
Wyrażenia „danego pracownika” czy „danej osoby” fiksuje jednocześnie jego płeć i nie mamy wtedy tego językowego zgrzytu, który odczuwalibyśmy, gdybyśmy zamiast tego napisali „pracownika o danej płci”.

Przy okazji zauważmy, że początkowy zwrot: „Wraz ze wzrostem długości stażu pracy o rok” moglibyśmy zastąpić innym: „Wraz z każdym kolejnym przepracowanym rokiem” i też byłoby poprawnie.

Jak widzimy, w interpretacjach ocen parametrów ważne są kwestie stylu językowego i pewnego wyczucia... ;)

➤ Interpretacja oceny parametru stojącego przy zmiennej czasowej, t (w modelach dla szeregów czasowych)

- Teraz przypuśćmy, że ocena $\hat{\beta}_1$ stoi przy zmiennej czasowej $x_{t1} = t$. Oczywiście w modelu mogą być obecne także inne zmienne objaśniające.
- Schemat interpretacji oceny parametru stojącego przy zmiennej czasowej nie jest zaś tak znacząco różny od tego ogólnego, przedstawionego w Ramce 1. Wystarczy się tylko zastanowić, jak poprawnie ubrać w słowa ten wzrost rozważanej zmiennej czasowej o 1 jednostkę. Czujemy, że sformułowania w stylu „jeżeli numer obserwacji/okresu wzrośnie o 1...” albo „wraz z każdym kolejnym okresem...” nie brzmią dobrze... Najlepiej jest po prostu powiedzieć „z okresu na okres”. Należy jednak pamiętać, by w miejsce „okresu” użyć właściwej jednostki czasu – tej odpowiadającej częstotliwości obserwacji, tzn. jeżeli analizujemy dane miesięczne, wówczas tym okresem jest miesiąc; dla danych kwartalnych okresem jest oczywiście kwartał; dla danych rocznych oczywiście okresem jest rok, itd. (naturalnie, możemy rozważać także danej wyższej częstotliwości: tygodniowe, dzienne, godzinowe, a w przypadku rynków finansowych – o jeszcze krótszym interwale czasowym)
- Jako przykład rozważmy „czysty” model trendu dla danych przedstawionych na jednym z dwóch zaprezentowanych wcześniej wykresów, tj. dla kwartalnej wartości zysku w pewnym przedsiębiorstwie (w zł):



Ocena parametru stojącego przy zmiennej czasowej wynosi tu $\hat{\beta}_1 = 1165,5$ – możemy ją zinterpretować w następujący sposób:

Z kwartału na kwartał wartość zysku w rozważanym przedsiębiorstwie wzrasta średnio rzecz biorąc o 1165,50 zł.

UWAGA: Gdyby w modelu występowały jakieś inne zmienne objaśniające, wówczas należałoby je „zafiksować” (czyli dopowiedzieć „przy ustalonych wartościach pozostałych zmiennych objaśniających”, tyle że w-y-m-i-e-n-i-a-j-ą-c je konkretnie). Przykład: wyobraźmy sobie, że w rozważanym tu modelu dla y_t – kwartalnej wartości zysku w pewnym przedsiębiorstwie, oprócz zmiennej czasowej uwzględniono jeszcze jedną (tylko) zmienną x_{t2} – wielkość wydatków na marketing (w setkach zł):

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 x_{t2} + \varepsilon_t$$

Przyjmijmy dalej, że $\hat{\beta}_1 = 1140,2$ (← zauważ, że ta ocena różni się „nieco” od przyjętej wcześniej wartości $\hat{\beta}_1 = 1165,5$ – w ogólności, uwzględnienie w modelu dodatkowych zmiennych objaśniających z reguły wpływa – w mniejszym lub większym stopniu – na oceny parametrów stojących przy innych zmiennych). Interpretacja tej oceny mogłaby brzmieć następująco:

Z kwartału na kwartał, przy danej wielkości wydatków na marketing, wartość zysku w rozważanym przedsiębiorstwie wzrasta średnio rzecz biorąc o 1140,20 zł.

Od razu zauważmy też, że użycie tu – w miejsce podkreślonego fragmentu – ogólnikowego zwrotu „przy ustalonych wartościach pozostałych zmiennych objaśniających” byłoby tu nietrafione, choćby z tej przyczyny, że owych „pozostałych zmiennych” jest tylko jedna :) Owszem, gdybyśmy mieli w modelu przysłowiowe „piętnaście” innych zmiennych objaśniających (w praktyce się to zdarza), wówczas ze względów praktyczno-językowych nie miałoby sensu wymienianie (w ramach „fiksowania”) każdej z nich z osobna w treści interpretacji, więc wtedy użycie wspomnianej, ogólnej formuły byłoby uzasadnione (niektórzy skracają ją wtedy do łacińskiego zwrotu *ceteris paribus*). Jednak w ramach „małych” modeli – o niewielkiej liczbie zmiennych objaśniających (a takimi się będziemy zajmować w ramach naszego kursu) – zwyczajnie należy wprost wymienić „z nazwy” każdą z „fiksowanych” zmiennych.

- Na zakończenie tej sekcji zastanówmy się jeszcze, co w sytuacji, gdy w modelu, owszem, jest obecna zmienna czasowa, ale interpretujemy ocenę parametru stojącego przy którejś *innej zmiennej*? Wtedy, oczywiście, owa zmienna czasowa jest jedną z tych, które trzeba „zafiksować”. Jako przykład wyobraźmy sobie, że w rozważanym tu modelu dla y_t – kwartalnej wartości zysku w pewnym przedsiębiorstwie, oprócz zmiennej czasowej uwzględniono jeszcze zmienną x_{t2} – wielkość wydatków na marketing (w setkach zł):

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 x_{t2} + \varepsilon_t$$

Wówczas moglibyśmy sformułować następującą interpretację oceny parametru β_2 (stojącego właśnie przy x_{t2}), wynoszącej przykładowo $\hat{\beta}_2 = 1200$:

Jeżeli w danym kwartale wielkość wydatków na marketing, ponoszonych przez rozważane przedsiębiorstwo byłaby wyższa o 100 zł, to w tym samym kwartale odnotowałoby ono zysk wyższy przeciętnie o 1200 zł.

W powyższej interpretacji zmienna czasowa została „zafiksowana” podwójnie – zarówno w pierwszej, jak i drugiej części zdania. Wynika to z faktu, że zarówno sam wzrost zmiennej x_{t2} , jak i jego skutek ma miejsce w tym samym, ustalonym („zafiksowanym”) okresie/kwartale. W ekonometrii można budować modele, w których analizowany jest skutek w *kolejnych* okresach po tym, w którym nastąpiłby wzrost danej zmiennej objaśniającej o jednostkę. Jednak w Klasycznym Modelu Regresji Liniowej „wszystko ma miejsce” w tym samym, ustalonym okresie.

Można jeszcze zapytać, co by się zmieniło w powyższej interpretacji, gdyby w modelu nie występowała zmienna czasowa – wtedy, po prostu, należałoby w niej usunąć podkreślone fragmentu (dotyczące zmiennej czasowej).