ESTYMACJA PRZEDZIAŁOWA W KMNRL

(CZYLI O PRZEDZIAŁACH UFNOŚCI)

Łukasz Kwiatkowski

Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych

Plan wykładu

1) Wprowadzenie
2) Konstrukcja przedziału ufności
3) Interpretacja przedziału ufności
4) Przykład
5) O związku przedziału ufności z testem t-Studenta

Wprowadzenie

- Przypomnijmy punkt wyjścia naszych rozważań, czyli zapis równania regresji (w domyśle spełniającej wszystkie założenia KMNRL):

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_K x_{tK} + \varepsilon_t$$

- We wprowadzeniu do materiału poświęconego testowi t-Studenta zaznaczyliśmy, że modele regresji wykorzystuje się przede wszystkim do: 1) prognozowania (o którym innym razem), 2) wnioskowania statystycznego o parametrach (które odzwierciedlają/ujmują zależności pomiędzy zmienną objaśnianą a objaśniającymi, czyli regresorami). Wyjaśniliśmy także istotę **wnioskowania statystycznego** – jako formułowania pewnych sądów (wniosków, zdań) o (z gruntu nieznanych) wartościach pewnych <u>parametrów</u> na podstawie ich <u>oszacowań</u> (i pewnych dodatkowych wielkości/obliczeń/procedur). Wnioskowanie to ma charakter statystyczny, gdyż z uwagi na losowość występującą w modelowanych zjawiskach dopuszcza możliwość "mylenia się" (z pewnym prawdopodobieństwem).
- Wymieniliśmy także dwie kluczowe techniki wnioskowania statystycznego: 1) testowanie hipotez statystycznych, 2) budowanie przedziałów ufności. O tych ostatnich właśnie – w tym odcinku :)
- Wiemy już, że we wnioskowaniu o parametrach nie możemy się zadowolić znajomością samych tylko ich <u>ocen</u> punktowych (nawet wraz z błędami średnimi szacunku), bo czy wiedza o tym, że $\hat{\beta}_1 = 8$ wystarcza? Cóż, mogłoby się wydawać, że gdy tę informację uzupełnimy jeszcze o błąd średni szacunku, $d(\hat{\beta}_1)$, to że to wystarczy, bo przecież mogę sobie "wyobrazić", że prawdziwa wartość parametru "skrywa" się (mniej więcej) w przedziale *ocena* ± *błąd*.

Wprowadzenie

- Powyższy tok rozumowania wymaga jednego spostrzeżenia i jednego “ale”:
  1) To dość naturalne czy wręcz instynktowne, by chcieć wyznaczyć taki przedział liczbowy, w którym prawdziwa wartość parametru mieściła by się – najlepiej z jakimś wysokim (bliskim 1), z góry zadanym prawdopodobieństwem – i na tym właśnie polega **estymacja przedziałowa** parametru. Taki przedział ukazywałby wszystkie “najbardziej wiarygodne” (z punktu widzenia danych i modelu) spośród możliwych wartości parametru (tych wszystkich możliwych jest “dość dużo”, bo cała oś $\mathbb{R}$:)
  2) ALE okazuje się, żę zasugerowany na poprzedniej stronie przepis na taki przedział, tj.

     (ocena parametru − błąd szacunku; ocena parametru + błąd szacunku)

     NIE jest poprawny, choć intuicyjne jest, aby „coś” odjąć, a z drugiej strony „to samo” dodać do oceny parametru (czyli też pewna symetria *krańców* przedziału względem oceny).

- W tym materiale dowiemy się, jak *poprawnie* skonstruować taki przedział i jak go *poprawnie* zinterpretować (a to, jak się okaże, będzie większym „czelendżem” niż by się na wstępie wydawało :)

Konstrukcja przedziału ufności

- Ustalmy **cel** – jest nim konstrukcja takiego przedziału, w którym prawdziwa wartość danego współczynnika regresji (ogólnie β_i, dla wybranego $i \in \{0, 1, \dots, K\}$) mieściłaby się z pewnym z góry zadanym prawdopodobieństwem (wysokim, czyli bliskim 1):
  1) Sam przedział oznaczmy sobie roboczo jako (A, B), gdzie A i B nazywamy, odpowiednio, lewym i prawym krańcem (lub końcem) przedziału ufności
  2) To z góry zadane, bliskie 1 prawdopodobieństwo nazywamy **poziomem ufności** i oznaczamy symbolem:

     $$1 - \alpha,$$

     który słusznie konotuje z poziomem istotności, α – z kolei niskim, bliskim 0 prawdopodobieństwem, z którym mamy do czynienia przy testowaniu hipotez statystycznych
  3) Konwencjonalne wartości poziomu ufności to: 0,99; 0,95 i 0,9 (odpowiadające konwencjonalnym poziomom istotności: 0,01; 0,05 i 0,1). Domyślnie, jeśli nie zadano inaczej, przyjmuje się $1 - \alpha = 0{,}95$.
- Powyżej opisany cel możemy ująć następująco: przy zadanym poziomie ufności $(1 - \alpha)$ wyznacz takie A i B, że zachodzi równość:

  $$\Pr(A < \beta_i < B) = 1 - \alpha$$
- Przedział (A, B) określamy jako $\mathbf{(1 - \boldsymbol{\alpha}) \cdot 100\%}$**-wy przedział ufności** dla parametru β_i
- Kolejne dwa slajdy – w ramce – są tylko dla “ciekawskich” :) i przedstawiają wyprowadzenie formuł na krańce przedziału ufności. Zasadniczo, mogą je Państwo pominąć i od razu przejść dalej :)

Konstrukcja przedziału ufności

- Punktem wyjścia jest więc zapis: $\Pr(A < \beta_i < B) = 1 - \alpha$
- Aby móc w ogóle mówić o prawdopodobieństwe, to wyrażenie w nawiasie musi “gdzieś mieć losowość”, tzn. któryś lub któreś z elementów: A, B, β_i, musi(-szą) być **zmienną**(-ymi) **losową**(-ymi).
- O parametrach w stastyce zawsze zakładamy, że są pewnymi nieznanymi *stałymi*, a zatem wielkościami *nielosowymi*. Zatem to *końce* przedziału ufności muszą być *losowe*
- W układzie założeń KMNRL można pokazać, że dla estymatora MNK parametru β_i statystyka postaci:[1]

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{d(\hat{\beta}_i)}$$

ma rozkład t-Studenta o $T - k$ stopniach swobody, co zapisujemy:

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{d(\hat{\beta}_i)} \sim St(T - k)$$

(Słusznie powyższe zapisy kojarzą nam się z formułą statystyki testowej t-Studenta...)

[1] Zwróćmy uwagę, że estymator jest *zmienną losową* (więc na pewno posiada „jakiś” rozkład prawdopodobieństwa), ponieważ jest funkcją obserwacji, a te traktujemy jako zmienne losowe (na poziomie założeń KMNRL, bo na poziomie modelowania już konkretnego zbioru danych, wartości y_t traktujemy jako konkretne już realizacje tychże zmiennych losowych. Na poziomie zapisu, dla ułatwienia, nie rozróżniamy tego, kiedy y_t traktujemy jako zmienne losowe, a kiedy jako ich realizacje – to zawsze wynika z kontekstu prowadzonych rozważań...

Konstrukcja przedziału ufności

- Powyższy fakt można wykorzystać do wyznaczenia przedziału ufności. Jeśli wiemy, że pewne wyrażenie (statystyka *t*) ma rozkład *t*-Studenta (którego kwantyle dowolnego rzędu łatwo obliczyć/odczytać z tablic), to możemy wówczas zapisać:

$$\Pr\left(-t_{\alpha/2} < \frac{\widehat{\beta}_i-\beta_i}{d(\widehat{\beta}_i)} < t_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha,$$

  gdzie $t_{\alpha/2}$ oznacza dwustronną wartość krytyczną (czyli stosowny kwantyl) w rozkładzie Studenta o $T-k$ stopniach swobody i na poziomie istotności α odpowiadającym zadanemu poziomowi ufności $1-\alpha$. Jest to dokładnie ta sama wartość krytyczną, z którą mamy do czynienia przy okazji dwustronnego testu *t*-Studenta).

- W powyższym zapisie wzięto pod uwagę to, że:
  1) rozkład *t*-Studenta jest symetryczny (względem zera)
  2) na lewo od $-t_{\alpha/2}$ i na prawo od $t_{\alpha/2}$ znajduje się $\alpha/2$ prawdopodobieństwa (zatem w sumie α), co oznacza, że „w środku", tj. pomiędzy $-t_{\alpha/2}$ i $t_{\alpha/2}$ zgromadzone jest $1-\alpha$ prawdopodobieństwa

- Przekształcając wyrażenie w nawiasach otrzymujemy równoważny zapis:

$$\Pr\left(\hat{\beta}_i - t_{\alpha/2}d(\hat{\beta}_i) < \beta_i < \hat{\beta}_i + t_{\alpha/2}d(\hat{\beta}_i)\right) = 1-\alpha$$

- Ta podwójna nierówność w nawiasach wyznacza nam szukany, $(1-\alpha)\cdot 100\%$-wy **przedział ufności** dla parametru β_i:

$$\left(\hat{\beta}_i - t_{\alpha/2}d(\hat{\beta}_i), \hat{\beta}_i + t_{\alpha/2}d(\hat{\beta}_i)\right)$$

Konstrukcja przedziału ufności

- Podsumowując, formuła na $(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})\cdot\mathbf{100\%}$**-wy przedział ufności** dla parametru β_i przyjmuje postać:

$$\left(\hat{\beta}_i - t_{\alpha/2} d\left(\hat{\beta}_i\right), \hat{\beta}_i + t_{\alpha/2} d\left(\hat{\beta}_i\right)\right)$$

gdzie:

- $\hat{\beta}_i$ – ocena MNK parametru β_i
- $d\left(\hat{\beta}_i\right)$ – błąd średni szacunku
- $t_{\alpha/2}$ – **dwustronna** (zawsze!) wartość krytyczna w rozkładzie t-Studenta o $T-k$ stopniach swobody (można ją odczytać z tablic lub obliczyć w Excelu za pomocą funkcji =ROZKŁAD.T.ODW)

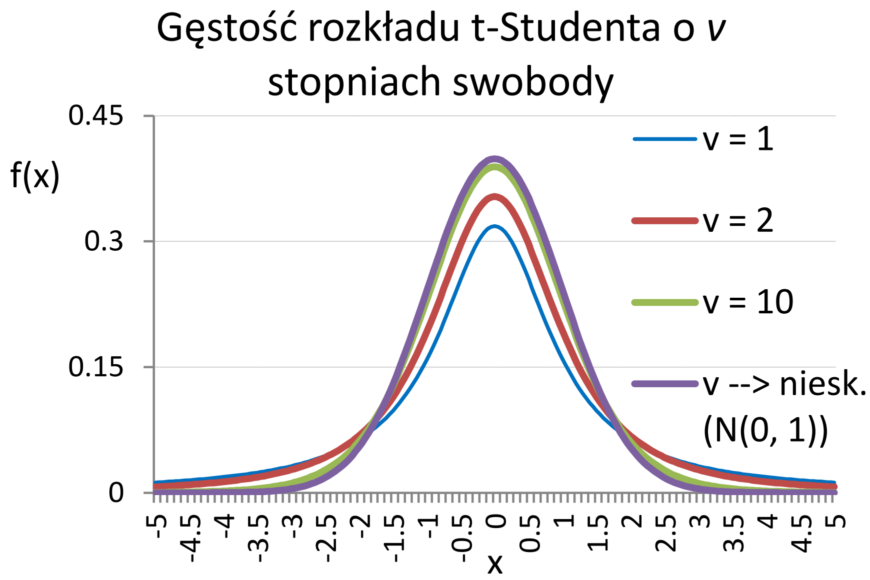
- Zauważmy, że:
  1) W samym środku przedziału ufności znajduje się ocena parametru, $\hat{\beta}_i$ (środek odcinka wyznaczamy za pomocą średniej arytmetycznej z lewego i prawego końca)
  2) Końce przedziału ufności są symetryczne względem oceny parametru, tj. jednakowo odległe na prawo i na lewo od tej oceny – o wartość równą $t_{\alpha/2} d\left(\hat{\beta}_i\right)$
  3) Zatem długość przedziału ufności wynosi $2 * t_{\alpha/2} d\left(\hat{\beta}_i\right)$

Konstrukcja przedziału ufności

- Dla różnych wartości liczby stopni swobody, $T-k$, i zadanej wartości poziomu ufności, dwustronna wartość krytyczna w rozkładzie Studenta oscyluje wokół wartości 2, a nie 1. Widzimy zatem, że zasugerowana we Wprowadzeniu do niniejszego opracowania, dość intuicyjna formuła "ocena±błąd" nie jest poprawna. Poprawnie skonstruowany przedział ufności jest szerszy, a to dokładnie o ile szerszy, zależy od wartości krytycznej.

→ **Pytanie "na pomyślunek"**: Co się dzieje z długością przedziału ufności (zwiększa się czy się zmniejsza?) wraz ze wzrostem liczby obserwacji (T)? (przy zadanych: poziomie ufności i liczbie szacowanych parametrów).

W udzieleniu odpowiedzi na to pytanie pomocne będzie przyglądnięcie się wykresom rozkładów t-Studenta o różnej liczbie stopni swobody:



Interpretacja przedziału ufności

- Poprawna interpretacja przedziału ufności nie jest tak oczywista (ani też intuicyjna), jak by się wydawało (i jak byśmy tego chcieli :) Postępując instynktownie, chcielibyśby:
  1) Po prostu podstawić do wzoru obliczone wartości oceny parametru, błędu średniego szacunku i wartość krytyczną, otrzymując w ten sposób pewien przedział liczbowy
  2) Zinterpretować owy przedział liczbowy jako *przedział, w którym z prawdopodobieństwem* $1-\alpha$ (np. 0,95) *znajduje się prawdziwa wartość parametru*.

- Niestety, z pewnych fundamentalnych przyczyn tak intuicyjna interpretacja nie jest prawidłowa, choć nierzadko taka właśnie (lub jakaś subtelna wariacja na jej temat) jest podawana w „obiegowej statystyce”... :/
- Dodajmy tylko, że ta „nie-prawidłowość” tak naturalnie brzmiącej interpretacji ma miejsce tylko na gruncie tzw. „klasycznej” statystyki (czyli tej, którą się zajmujemy na zajęciach :). Istnieje bowiem odrębny paradygmat wnioskowania statystycznego – tzw. wnioskowanie bayesowskie (którego dzieje w historii rozwoju statystyki są tak burzliwe, jak losy bohaterów „Mody na sukces”;).[2] Okazuje się, że na gruncie statystyki bayesowskiej jak najbardziej tak zdroworozsądkowa i naturalna interpretacja przedziału ufności, jak ta sformułowana powyżej (pkt 2) jest formalnie uzasadniona i ponadto, jedyna poprawna :)

---

[2] Termin „wnioskowanie bayesowskie” pochodzi od nazwiska brytyjskiego matematyka i duchownego prezbiteriańskiego, Thomasa Bayesa, znanego przede wszystkim ze sformułowania tzw. twierdzenia Bayesa, którego teza prezentuje wzór na prawdopodobieństwo warunkowe ($\Pr(A|B)$).

Interpretacja przedziału ufności

- Skoro w podejściu „klasycznym" do statystyki nie jest uzasadnione sformułowanie interpretacji przedziału ufności w jej najbardziej naturalnym brzmieniu, to pytanie: jak ją poprawnie sformułować?
- W tym celu potrzebujemy sobie uświadomić kilka kwestii:

1) Na początek zwróćmy uwagę, że przedział ufności – który, przypomnijmy, jest zadany wzorem:

$$\left(\hat{\beta}_i - t_{\alpha/2} d\left(\hat{\beta}_i\right), \hat{\beta}_i + t_{\alpha/2} d\left(\hat{\beta}_i\right)\right)$$

jest przedziałem *losowym* (a nie liczbowym), gdyż jego krańce są *zmiennymi losowymi*. Dlaczego? Ponieważ zarówno estymator parametru, jak i błąd średni szacunku są *zmiennymi losowymi*, tzn. mogą przyjmować różne wartości – w zależności od „wylosowanej" próby (przypomnijmy, że zbiór danych, na podstawie którego szacujemy model regresji, traktujemy właśnie jako próbę *losową* z pewnej ogólnej populacji). Jeśli zatem wylosowalibyśmy inną próbę (inny zbiór danych z populacji, np. inne 10 gospodarstw domowych), to uzyskalibyśmy (mniej lub bardziej) różną ocenę i błąd średni szacunku (tego samego) parametru β_i. To trochę jak z łucznikami strzelającymi do tarczy – każdy z nich próbuje trafić do tego samego celu (w „10", czyli w prawdziwą wartość parametru β_i), ale gdy oddają strzał (jeden łucznik = pojedyncza próba, na podstawie której szacujemy model), to każdy trafi gdzieś indziej – nieco bliżej lub nieco dalej...

2) To właśnie ten przedział *losowy* jest tak skonstruowany, że – owszem – prawdziwa wartość parametru β_i mieści się w nim z prawdopodobieństwem $1 - \alpha$.

3) Ponadto, można pokazać, że właśnie tak, a nie inaczej skonstruowany przedział *losowy* jest *najkrótszy* z możliwych, które spełniają postulat „pokrywania" prawdziwej wartości parametru ze z góry zadanym prawdopodobieństwem $1 - \alpha$

Interpretacja przedziału ufności

4) Rzecz jednak w tym, że w praktyce to my nie chcemy interpretować przedziału *losowego* (czyli pewnego konstruktu formalnego, abtrahującego od konkretnych danych), tylko chcemy zinterpretować konkretny przedział *liczbowy* (np. (2,3; 4,1)) – ten, który uzyskamy dla „naszego”, tego konkretnego zbioru danych (czyli próbki).

5) Jak się ma zatem przedział ufności jako przedział *liczbowy* (uzyskany dla *konkretnego* zbioru danych, czyli dla konkretnej próby) do przedziału ufności jako przedziału *losowego*?

6) Otóż przedział *liczbowy* jest pojedynczą realizacją przedziału *losowego*:

- realizacją, bo spośród różnych możliwych do uzyskania wartości końców przedziału – i te możliwości przedstawia kontrukcja przedziału ufności jako przedziału losowego – dla „danych danych” realizuje się taki, a nie inny wynik w postaci konkretnych już wartości liczbowych
- pojedynczą zaś dlatego, że dany model regresji zostaje oszacowany na podstawie pojedynczej tylko próby (oczywiście, możemy sobie wyobrazić szacowanie tego samego modelu – co do postaci analitycznej – na zbiorze innych danych reprezentujących jednak tę samą populację, np. inne 10 gospodarstw domowych – wtedy też jednak uzyskamy pojedynczą, choć inną realizację przedziału losowego)

Interpretacja przedziału ufności

7) Na zakończenie tego wstępu :) do interpretacji przedziałów ufności dodajmy jeszcze tylko, że:

- Jak zaznaczono w uwadze 2) powyżej, to przedział *losowy* pokrywa wartość parametru z pewnym *prawdopodobieństwem* (równym poziomowi ufności, $1-\alpha$)
- W odniesieniu do przedziału *liczbowego* (czyli pojedynczej realizacji) nie możemy formułować takich konstatatcji probabilistycznych, ponieważ w danym przedziale *liczbowym* prawdziwa wartość parametru albo się znajduje, albo się nie znajduje – nie ma tu już miejsca na prawdopodobieństwo. Owszem, tego jednak, czy się znajduje, czy się nie znajduje nigdy się nie dowiemy, ponieważ prawdziwa wartość parametru pozostaje nieznana...

➢ Podsumowując:

- Przedział ufności jako pewna konstrukcja formalna jest przedziałem *losowym*, danym wzorem:

$$\left(\hat{\beta}_i - t_{\alpha/2} d\left(\hat{\beta}_i\right), \hat{\beta}_i + t_{\alpha/2} d\left(\hat{\beta}_i\right)\right)$$

- Przedział ten – oprócz tego, że z zadanym z góry prawdopodobieństwem równym $1-\alpha$ (czyli poziomem ufności) zawiera w sobie nieznaną wartość parametru β_i – ma jeszczę tę zaletę, że jest najkrótszy spośród wszystkich możliwych do skontruowania tego typu przedziałów.
- Gdy do powyższego wzoru wstawimy już konkretne wyniki liczbowe uzyskane dla posiadanej próby (czyli modelowanego zbioru danych), wówczas uzyskujemy przedział *liczbowy*, który jest po prostu tylko pojedynczą *realizacją* tego przedziału *losowego*.
- W praktyce, samego pojęcia „przedziału ufności” zwykle używa się w odniesieniu już do wyniku (przedziału) liczbowego

Przykład

Rozważmy znany nam już przykład z wcześniejszych materiałów – dotyczący gospodarstw domowych i ponoszonych przez nie miesięcznych wydatków na transport. Na podstawie danych uzyskanych dla $T = 10$ gospodarstw uzyskano model: $E_t = -34{,}2 + 7{,}1I_t + 27{,}3H_t + \hat{\varepsilon}_t$, zatem $\hat{\beta}_0 = -34{,}2$; $\hat{\beta}_1 = 7{,}1$; $\hat{\beta}_2 = 27{,}3$. Przypomnijmy także błędy średnie szacunku: $d(\hat{\beta}_0) = 1{,}2$; $d(\hat{\beta}_1) = 3{,}5$; $d(\hat{\beta}_2) = 4{,}3$.

- **Cel:** zbudować 90%-wy przedział ufności dla parametru odzwierciedlającego wpływ typu gospodarstwa domowego na miesięczną wielkość ponoszonych przezeń wydatków na transport:
  - Określamy, o który **parametr** chodzi: β_2
  - Zapisujemy **wzór na przedział ufności** dla rozważanego parametru:

    $$\left(\hat{\beta}_2 - t_{\alpha/2} d\left(\hat{\beta}_2\right), \hat{\beta}_2 + t_{\alpha/2} d\left(\hat{\beta}_2\right)\right)$$

    Do pełni szczęścia brakuje nam tylko wartości krytycznej, zatem:
  - Określamy **poziom ufności**: $1 - \alpha = 0{,}9$ (zgodnie z celem; gdyby z treści zadania nie wynikało, że trzeba przyjąć inny poziom ufności, wówczas zadajemy domyślną jego wartość: 0,95)
  - **Wartość krytyczną** (w przedziałach ufności potrzebujemy zawsze dwustronnej) wyznaczamy w Excelu, za pomocą funkcji =ROZKŁAD.T.ODW(*prawdopodobieństwo; stopnie_swobody*), pamiętając, że w miejsce argumentu *prawdopodobieństwo* podajemy poziom istotności odpowiadający zadanemu poziomowi ufności (tu więc: *prawdopodobieństwo* = 0,1), zaś *stopnie_swobody* wynoszą $T - k = 10 - 3 = 7$. Uzyskujemy: $t_{\alpha/2} = 1{,}895$
  - **Podstawiamy do wzoru** wartości**:** $\hat{\beta}_2 = 27{,}3$; $d\left(\hat{\beta}_2\right) = 4{,}3$; $t_{\alpha/2} = 1{,}895$

Przykład – c.d.

- Otrzymany przedział ufności (liczbowy, po zaokrągleniu do 2 miejsc po przecinku) to:

$$(19{,}15;\, 35{,}45)$$

- **Interpretacja:** (wiecie, ta jedyna słuszna ;)

  *Otrzymany przedział liczbowy to pojedyncza realizacja najkrótszego przedziału losowego, któr**y** z prawdopodobieństwem 0,9 zawiera prawdziwą, nieznaną wartość parametru odzwierciedlającego wpływ typu gospodarstwa domowego na miesięczną wielkość ponoszonych przezeń wydatków na transport.*

  Równoważnie można też napisać:

  *Otrzymany przedział liczbowy to pojedyncza realizacja najkrótszego przedziału losowego, w któr**ym** z prawdopodobieństwem 0,9 mieści się prawdziwa, nieznana wartość parametru odzwierciedlającego wpływ typu gospodarstwa domowego na miesięczną wielkość ponoszonych przezeń wydatków na transport.*

- W obydwu wariantach na czerwono wyróżniono końcówkę w zaimku „któr**y**”/ „któr**ym**”, by zwrócić uwagę na to, do czego się on odnosi – mianowicie do przedziału **losowego**, a nie do jego realizacji, ponieważ – powtórzmy – to w właśnie przedziale losowym (a nie liczbowym) może się mieścić wartość parametru z pewnym prawdopodobieństwem (zaś w przedziale liczbowym albo się mieści, albo się nie mieści, ale tego nie jesteśmy w stanie stwierdzić)
- Zauważmy, że w środku tego przedziału znajduje się sama ocena parametru – jeśli policzyć średnią arytmetyczną z końców przedziału, to otrzymamy: $(19{,}15 + 35{,}45)/2 \; = 27{,}3 = \hat{\beta}_2$

Przykład – c.d.

- W ramch rozważanego przykładu uczyńmy jeszcze małe, ale za to dość ważkie spostrzeżenie. Przywołajmy na chwilę kontekst próbkowania, czyli traktowania modelowanego zbioru danych jako pojedynczej próby z pewnej (teoretycznie nieskończonej) populacji (czyli model oszacowaliśmy na danych dotyczących 10 gospodarstwach domowych, traktując je jaok wylosowane – dosłownie lub tylko w założeniu – z ich teoretycznie nieskończonej populacji). Kontekst ten jest fundamentem „klasycznej” statystyki, o czym wspominaliśmy już wcześniej. Jak osadzić w nim przedziały ufności? Wyobraźmy sobie – rozszerzając nieco perspektywę w rozważanym tu przykładzie – że ten sam (co do postaci analitycznej) model, czyli

$$E_t = \beta_0 + \beta_1 I_t + \beta_2 H_t + \varepsilon_t$$

oszacowano osobno na 100 różnych próbkach (każda o tej samej liczbie obserwacji), czyli na 100 zbiorach danych, każdy dotyczący grupy losowo wybranych $T = 10$ gospodarstw. W każdym z tych 100 modeli wyznaczono owy 90%-wy przedział ufności dla parametru β_2, oczywiście za każdym razem otrzymując subtelnie inne wyniki. Mamy zatem 100 *realizacji* przedziału ufności, zbudowanych przy poziomie ufności $1 - \alpha = 0{,}9$. I teraz najważniejsze: jak ma się do tego wszystkiego przyjęty *poziom ufności*? Otóż należy się (tylko... albo aż) *spodziewać*, że w 90 na 100 (czyli w 90% przypadków) tych otrzymanych liczbowych przedziałów ufności mieści się prawdziwa wartość parametru β_2. Nie wiemy jednak tego, w których (a tym samym *dokładnie* w ilu) przedziałach *faktycznie* się mieści, a w ilu się nie mieści – żeby to wiedzieć, musielibyśmy oczywiście znać prawdziwą wartość parametru, co jest niewykonalne. Dlatego też w powyższym stwierdzeniu podkreślono własnie ten aspekt antycypacji (*spodziewania się*), a nie pewności :)

O związku przedziału ufności z testem *t*-Studenta

- Na koniec wyjaśnimy jeszcze związek, jaki występuje pomiędzy dwiema najważniejszymi technikami wnioskowania statystycznego o pojedynczym parametrze β_i (dla konkretnego $i \in \{0,1,\ldots,K\}$):
  - przedziałem ufności – zbudowanym na zadanym poziomie ufności $1-\alpha$
  - dwustronnym testem t-Studenta – przeprowadzanym na odpowiednim poziomie istotności α, dla układu hipotez: $H_0\colon \beta_i = \beta_i^* \quad vs. \quad H_1\colon \beta_i \neq \beta_i^*$

- W dalszych rozważaniach zakładamy (koniecznie!), że poziom ufności i poziom istotności są kompatybilne, tzn. faktycznie dopełniają się do jedności (w praktyce nie zawsze tak musi być, tzn. przedział ufności można zbudować np. przy $1-\alpha = 0{,}9$, zaś test przeprowadzić dla $\alpha = 0{,}05$ – w takiej sytuacji widzimy, że obydwa poziomy nie sumują się do 1, zatem są niekompatybilne)
- Wiemy już, że na przedział ufności – ten liczbowy, uzyskany dla konkretnej próby – możemy patrzyć jako zbiór najbardziej wiarygodnych (w świetle danych i w ramach modelu) wartości parametru β_i
- Z kolei test statystyczny służy ocenie tego, czy zadana przez nas, pewna hipotetyczna wartość parametru β_i, równa β_i^*, jest wiarygodna (H_0) czy też nie (H_1) – oczywiście, z punktu widzenia danych i w ramach konkretnego modelu.
- Wobec powyższych dwóch stwierdzeń można przypuszczać (i faktycznie tak właśnie jest!), że jeśli ta testowana, hipotetyczna, zadana przez nas w teście wartość parametru, tj. β_i^*, jest jedną z tych mieszczących się w przedziale ufności, wówczas test opowie się za H_0, tzn. nie będziemy mieli podstaw by ją odrzucić. W przeciwnym razie, tj. gdy β_i^* jest spoza przedziału ufności (czyli nie jest którąś z najbardziej wiarygodnych wartości β_i), wówczas test odrzuci H_0 na rzecz H_1.

O związku przedziału ufności z testem *t*-Studenta

- Wobec powyższego spostrzeżenia warto zwrócić uwagę na kluczową we wnioskowaniu o parametrach wartość, którą jest zero – gdy jest ono testowaną wartością parametru ($\beta_i^* = 0$), wówczas, jak wiemy, mamy do czynienia z tzw. testem istotności, w którym rozsądzamy, czy dany parametr należy uznać za:
  - statystycznie nieistotny (inaczej: statystycznie równy 0) $\rightarrow H_0$
  - czy jednak statystycznie istotny (inaczej: statystycznie różny od 0) $\rightarrow H_1$
- Powyższe rozumowanie sprowadza się do zapytania:

  Czy w świetle posiadanych danych (i oczywiście, w ramach oszacowanego modelu) wartość 0 parametru β_i należy uznać za wiarygodną (H_0) *czy też nie* (H_1)?
- Przenosząc to na grunt przedziału ufności:
  - Jeśli wartość 0 mieści się w uzyskanym przedziale ufności na zadanym poziomie ufności (co ma miejsce, gdy lewy kraniec jest ujemny, zaś prawy – dodatni), wówczas – na kompatybilnym poziomie istotności – test istotności nie odrzuci H_0 (mówiącej, że $\beta_i = 0$).
  - W przeciwnym razie, tj. gdy 0 nie znajduje się w przedziale ufności (co ma miejsce, gdy oba krańce są jednocześnie albo dodatnie, albo ujemne), wówczas nie jest ono wiarygodną wartością parametru, w związku z czym test istotności odrzuci H_0 (mówiącą, że $\beta_i = 0$), i „nakaże" przyjąć $H_1: \beta_i \neq 0$. No, logiczne :)
- Co praktycznego wynika dla nas z tego związku przedziału ufności z testem t-Studenta? Przede wszystkim możliwość „szybkiego" wnioskowania o istotności parametru w sytuacji, gdy mamy przed oczami konkretny przedział ufności – po prostu sprawdzamy, czy 0 mieści się w nim, czy też nie.