*Wnioskowanie bayesowskie w ekonomii empirycznej* (Analityka gospodarcza, zima 2023/2024)

***Predykcja***

***w Bayesowskim Modelu Normalnej Regresji Liniowej***

Łukasz Kwiatkowski

Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych

**Plan wykładu**

1. Podstawy predykcji bayesowskiej
2. Predykcja w BMNRL
3. Przykład

**Podstawy predykcji bayesowskiej 1**

* Ogólne podstawy teoretyczne predykcji na gruncie bayesowskim – na razie bez kontekstu regresji
* **Wektor obserwacji niedostępnych** – podlegających prognozie, „niezaobserwowanych obserwacji”; (a także ewentualnych *braków danych* „w próbie”):

🡪 W przypadku **danych przekrojowych**:

* () – wartość zmiennej przewidywana dla jakiegoś -tego „obiektu” (np. prognozowana cena mieszkania) – w regresji: przy **zadanych** wartościach zmiennych objaśniających, charakteryzujących ten obiekt (np. wielkość powierzchni, liczba pokoi, nr piętra)
* − ilość takich jednocześnie rozważanych prognoz (rozważamy różne obiekty jednocześnie, np. mieszkania o różnych charakterystykach); jeżeli , wówczas jest skalarem, więc indeks w oznaczeniu staje się zbyteczny

🡪 W przypadku **szeregów czasowych**:

* () – wartość zmiennej przewidywana na (zwykle) okresów wprzód poza okres próby (and. -*step-ahead forecast*), tak więc (z reguły używa się tego ostatniego symbolu)
* − maksymalny horyzont prognozy

**Podstawy predykcji bayesowskiej 2**

* Predykcja / Prognozowanie = wnioskowanie o :
  + **na gruncie klasycznym** – poprzez charakterystyki tzw. **(teorio-)próbkowego rozkładu predyktywnego**: , a dokładniej 🡨 „zakotwiczony” w pojedynczym punkcie przestrzeni parametrów (ocenie ); zatem nie uwzględnia niepewności estymacji :
    - Prognoza punktowa: 🡪 w regresji:
    - Średni błąd predykcji *ex ante*:

,

gdzie to błąd prognozy

* + - „Klasyczne” przedziały prognozy – w KMNRL:
  + **na gruncie bayesowskim** – ma tu taki sam status jak „zwykłe” parametry, , tj. stanowi nieobserwowalną (przynajmniej w momencie dokonywania prognozy) zmienną losową:
    - – zawsze nieobserwowalne
    - – nieobserwowalne przynajmniej w momencie dokonywania prognozy (w przypadku prognozowania szeregów czasowych wystarczy „zaczekać”; w przypadku danych przekrojowych możemy się nigdy nie doczekać… ;)

🡪 Bayesowskie wnioskowanie o (= predykcja) – poprzez tzw. **(bayesowski)** **rozkład predyktywny:**

**Podstawy predykcji bayesowskiej 3**

* Bayesowskie wnioskowanie o (predykcja) – poprzez tzw. (bayesowski) **rozkład predyktywny:**

🡪 Rozkład ten:

* jest rozkładem łącznym wszystkich wielkości prognozowanych („siedzących” w )
* odzwierciedla całą naszą wiedzę (niepewność!) o po wglądzie w dane (i – jak się za chwilę okaże – także z uwzględnieniem niepewności związanej z parametrami, )
* co do konstrukcji jest rozkładem *a posteriori* (warunkowanie względem zaobserwowanych danych), ale termin „rozkład *a posteriori*” rezerwujemy dla

🡪 Prognoza bayesowska prowadzi do wyznaczenia całego **rozkładu prawdopodobieństwa** możliwych do zaobserwowania wartości zjawiska (pod warunkiem informacji zawartej w próbie), co idealnie odpowiada paradygmatowi tzw. **prognozowania probabilistycznego** (🡨 *currently, most trendy* ;)

🡪 ALE: Jak wyznaczyć rozkład predyktywny?

**Podstawy predykcji bayesowskiej 4**

* **Model bayesowski bez predykcji [przypomnienie]:**
* **Model bayesowski z uwzględnieniem predykcji:**
* **(Bayesowski) rozkład predyktywny:**

🡪 Rozkład predyktywny jest *mieszanką* tych tzw. (teorio-)próbkowych rozkładów predyktywnych, z rozkładem *a posteriori* jako rozkładem mieszającym (różne gęstości – z uwagi na możliwe różne wartości – są „ważone” gęstością *a posteriori* reprezentującą niepewność co do tych różnych wartości ). Zatem – w odróżnieniu od (teorio-)próbkowego (in. „klasycznego”) – bayesowski rozkład predyktywny uwzględnia w sobie niepewność związaną z parametrami.

⇒ W konsekwencji można się spodziewać, że bayesowskie rozkłady predyktywne z reguły będą (trochę) bardziej rozproszone od tych wyznaczonych na gruncie „klasycznym” 🡪 a to dobrze czy niedobrze?!

**Podstawy predykcji bayesowskiej 5**

* **Wnioskowanie o – praktyka:**

🡪 Jeżeli , tj. jest wektorem, a nie skalarem, wówczas przechodzimy na brzegowe rozkłady predyktywne poszczególnych współrzędnych :

gdzie oznacza wektor po usunięciu -tej współrzędnej.

🡪 Rozkład brzegowy uwzględnia w sobie niepewność związaną z pozostałymi współrzędnymi

🡪 Charakterystyka poprzez:

* Predyktywne wartości oczekiwane:

Bayesowskie prognozy punktowe

* Mediany predyktywne:
* Modalne predyktywne:
* Predyktywne odchylenia standardowe:

Przy wielookresowej prognozie szeregów czasowych, zwykle prezentowane w formie wykresu wachlarzowego

* Kwantyle predyktywne:
* Predyktywne przedziały kwantylowe:
* Przedziały najwyższej gęstości predyktywnej:

**Podstawy predykcji bayesowskiej 6**

* **Wykres wachlarzowy (ang. *fan chart*, *fan plot*):**

🡪 Termin sformułowany i spopularyzowany przez Bank Anglii w raportach prognostycznych inflacji, podawanych do informacji publicznej

🡪 Świetnie nadaje się do graficznej prezentacji wielookresowej, probabilistycznej prognozy szeregu czasowego (czy to bayesowskiej, czy „klasycznej”)

|  |  |
| --- | --- |
| *Fan chart* w wersji przedziałowej (ang. *interval*) | *Fan chart* w wersji percentylowej (ang. *percentile*) |

🡪 R: funkcja **fan** w bibliotece **fanplot** – wymaga wcześniejszego uzyskania losowań z rozkładu predyktywnego

🡪 **Paleta barw** – **str. 2** w: <http://www.biecek.pl/R/PrzewodnikPoPakiecieRWydanieIVinternet.pdf>

**Predykcja w BMNRL 1**

* Przechodzimy do modelu regresji – równanie:
  1. **W próbie**:
     + Skalarnie ():
     + Macierzowo:
  2. **Poza próbą – predykcja**:
     + Pojedyncza współrzędna (): , – ustalony:
     + Wektor ( prognoz): , ,

**Predykcja w BMNRL 2**

* **Model bayesowski – z predykcją:**

a tak naprawdę

🡪 dla zwięzłości zapisu pomijamy dalej warunkowanie względem oraz

🡪 – omówiony wcześniej (4 przypadki w zależności od rozkładu *a priori*)

🡪 Pytanie: jak wygląda ?

Założenia KMNRL – dotyczące rozkładu próbkowego (czyli rozkładu danych pod warunkiem parametrów) „obowiązują” dla wszystkich obserwacji – zarówno tych w próbie, jak i tych spoza niej (w przeciwnym razie model nie byłby spójny!)

Zatem skoro [przypomnienie]: ,

więc

**Predykcja w BMNRL 3**

* **Rozkład predyktywny [przypomnienie]:**

🡪 Szczegóły odn. zależą od przyjętego rozkładu *a priori*:

* 1. Reguła Jeffreysa z zależnością [RJz] – nie rozważamy…
  2. Reguła Jeffreysa z niezależnością [RJn] – da się wyprowadzić analityczna postać
  3. Gamma-normalny z zależnością [GNz] – da się wyprowadzić analityczna postać
  4. Gamma-normalny z niezależnością [GNn] – nie jest żadnym znanym rozkładem prawdopodobieństwa 🡪 konieczność zastosowania podejścia symulacyjnego

Ad [RJn] i [GNz]: ,

gdzie , , ,

natomiast – patrz wcześniejsze wykłady (RJn i GNz):

|  |  |
| --- | --- |
| **RJn** | **GNz** |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

**Predykcja w BMNRL 4**

* **Charakterystyki łącznego rozkładu predyktywnego (w przypadkach [RJn] i [GNz]):**

, , ,

* , dla
* ( – dowolne)
* mediana w przypadku rozkładów wielowymiarowych – za trudne…
* , dla →

**Predykcja w BMNRL 5**

* **Brzegowe rozkłady predyktywne (tj. dla pojedynczych** , **):**

gdzie oznacza wektor powstały z poprzez pominięcie *i*-tej jego współrzędnej, jest -tą współrzędną wektora , natomiast

Uwaga:

* Predyktywna wartość oczekiwana: dla
* Modalna i mediana predyktywna: ( – dowolne)
* Wariancja predyktywna: dla
* Predyktywne odchylenie standardowe:

**Predykcja w BMNRL 6**

* **Brzegowe rozkłady predyktywne (tj. dla pojedynczych** , **):**
* ,

gdzie – dwustronna wartość kryt. w :

* + , gdzie ;
  + w Excelu: → =ROZKŁAD.T.ODW(*prawdopodobieństwo* = ; *stopnie\_swobody* = ) (starsza wersja)

→ =ROZKŁ.T.ODWR.DS(*prawdopodobieństwo* = ; *stopnie\_swobody* = ) (nowsza wersja)