Funkcja gamma, Γ(·) (ang. *the gamma function*) – nie mylić z *rozkładem* gamma!

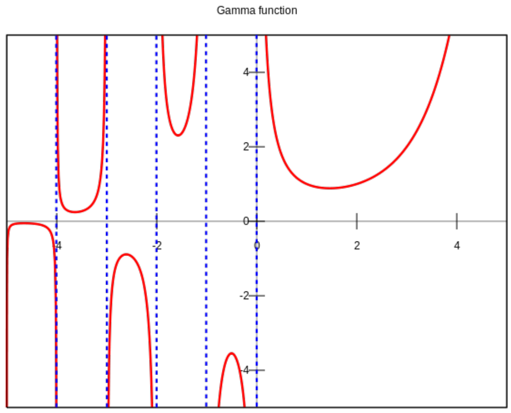
- Niech $a \in \mathbb{C}$. Dla takich a, że $Re(a) > 0$ funkcja gamma (zwana także funkcją gamma Eulera), $\Gamma(a)$, jest zdefiniowana jako następująca całka:

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t}\, dt\,.$$

- Istnieje alternatywny (ogólniejszy, gdyż dla dowolnego $a \in \mathbb{C}$) sposób definiowania funkcji Γ:

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,n^a}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)} = \frac{1}{a}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a}{1+\frac{a}{n}}\,.$$

- Wybrane własności:
  - $\Gamma(0{,}5) = \sqrt{\pi}$
  - $\Gamma(1) = 1$
  - $\Gamma(a+1) = a \cdot \Gamma(a)$
  - $\Gamma(a) = (a-1)!$ (o ile $a \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots,\}$)
- Wykres funkcji gamma dla $a \in \mathbb{R}$:



Źródło: http://pl.wikipedia.org/wiki/Plik:Gamma_plot.svg

Funkcja beta, B(·, ·) (ang. *the beta function*) – nie mylić z *rozkładem* beta!

- Niech $a, b \in \mathbb{C}$. Dla takich a i b, że $Re(a) > 0$ i $Re(b) > 0$ funkcja beta (zwana także funkcją beta Eulera, całką Eulera pierwszego rodzaju), $B(a, b)$, jest zdefiniowana jako następująca całka:

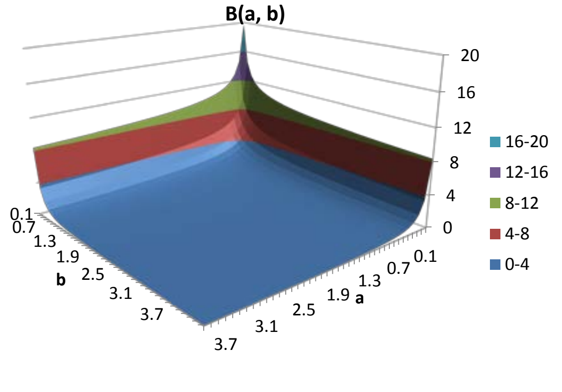
$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\, dt\,.$$

- Istnieją alternatywne (ogólniejsze, gdyż dla dowolnych $a, b \in \mathbb{C}$) sposoby definiowania funkcji B (czyt. Beta), np.

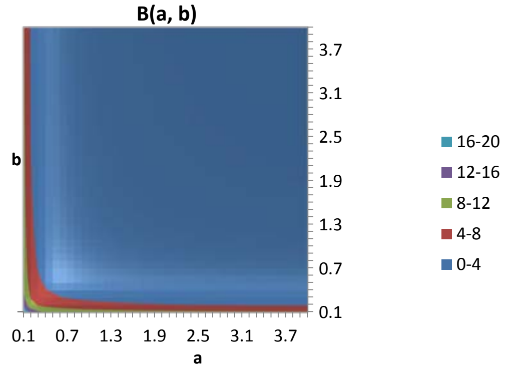
$$B(a,b) = \frac{a+b}{ab}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{ab}{n(a+b+n)}\right)^{-1}.$$

- Wybrane własności:
  - $B(a,b) = B(b,a)$ (symetria)
  - $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ (związek z funkcją gamma)
  - $B(a,b) = \dfrac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}$ (o ile $a, b \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots,\}$)

- Wykres funkcji beta dla $a, b \in (0, 4)$



Wykres powierzchniowy 3D



Wykres konturowy (poziomicowy)

- Zachęcam, aby powyższe wykresy odtworzyć samodzielnie w Excelu, wykorzystując wzór

$$\mathrm{B}(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

W tym celu przyda się funkcja ROZKŁAD.LIN.GAMMA(a), która zwraca *logarytm naturalny* funkcji gamma w argumencie a. *Pytanie*: jak zapisać formułę w Excelu, aby obliczyć wartość funkcji B(a, b), mając do dyspozycji formułę, która zwraca $\ln\Gamma(a)$?

Niepełna funkcja beta, B(x; ·, ·) (ang. *the incomplete beta function*)

- Niech $a, b \in \mathbb{C}$ i $x \in [0, 1]$. Dla takich a i b, że $Re(a) > 0$ i $Re(b) > 0$ niepełna funkcja beta, B(x; a, b), jest zdefiniowana jako następująca całka:

$$\mathrm{B}(x;a,b)=\int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt\,.$$

- Dla $x = 1$ zachodzi równość: B(1; a, b) = B(a, b).

Standaryzowana niepełna funkcja beta, $I_x(\cdot,\cdot)$ (ang. *the standardized incomplete beta function*)

- Niech $a, b \in \mathbb{C}$ i $x \in [0, 1]$. Dla takich a i b, że $Re(a) > 0$ i $Re(b) > 0$ standaryzowana niepełna funkcja beta (w skrócie: niepełna funkcja beta), $I_x(a, b)$, jest zdefiniowana jako:

$$I_x(a,b)=\frac{\mathrm{B}(x;a,b)}{\mathrm{B}(a,b)}.$$

- Funkcja $I_x(a, b)$ jest *dystrybuantą rozkładu beta Be*(a, b):[1]

$$I_x(a,b)=\frac{\mathrm{B}(x;a,b)}{\mathrm{B}(a,b)}=\int_0^x \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)}t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt=\int_0^x p_{Beta}(t\,|\,a,b)\,dt\,,$$

gdzie $p_{Beta}(\cdot\,|\,a, b)$ jest funkcją gęstości rozkładu beta *Be*(a, b):

$$p_{Beta}(t\,|\,a,b)=\frac{1}{\mathrm{B}(a,b)}t^{a-1}(1-t)^{b-1}.$$

- Wybrane własności:
  - $I_0(a,b)=0$
  - $I_1(a,b)=1$
  - $I_x(a,b)=1-I_{1-x}(b,a)$

---

[1] Zwróćmy uwagę na oznaczenia:
- B(a, b) – *funkcja* beta w argumencie (a, b),
- *Be*(a, b) – *rozkład* beta o parametrach a, b.