Rozkład gamma, *G*(*a*, *b*) (ang. *the gamma distribution*)

- **Zapis**: $x \sim G(a, b)$
- **Parametry**: $a > 0$ (parametr kształtu), $b > 0$ (odwrotność parametru skali)
- **Nośnik**: $[0, +\infty)$
- **Funkcja gęstości**:[1]

$$p(x) = f_G(x|a,b) = \underbrace{\frac{b^a}{\Gamma(a)}}_{\substack{stała \\ normuj.}} \underbrace{x^{a-1}e^{-bx}}_{\substack{jądro \\ gęstości}}$$

gdzie $\Gamma(\cdot)$ jest funkcją gamma Eulera.

- **Charakterystyki**:
  - Wartość oczekiwana: $E(x) = \frac{a}{b}$
  - Mediana: brak jawnej, analitycznej formuły – patrz „Kwantyle” (poniżej)
  - Modalna:
    - dla $a \geq 1$: $Mo(x) = \frac{a-1}{b}$
    - dla $a \in (0, 1)$: nie istnieje
  - Wariancja: $Var(x) = \frac{a}{b^2}$
  - Kwantyle: brak jawnej, analitycznej formuły – obliczane tylko za pomocą procedur numerycznych → Excel: =ROZKŁ.GAMMA.ODWR(*rząd_kwantyla*; *a*; 1/*b*) (*rząd_kwantyla* = *prawdopodobieństwo* skumulowane na lewo od jego wartości; wyjaśnienie tego 1/*b* – patrz przypis 1 u dołu strony)

- **Szczególny przypadek: rozkład wykładniczy, *Exp*(λ)** (ang. *the exponential distribution*)
  - Dla $a = 1$ otrzymujemy rozkład wykładniczy, tzn. $x \sim G(1, b) \Leftrightarrow x \sim Exp(b)$, przy czym parametr rozkładu wykładniczego zwykle oznaczany jest symbolem λ ($\lambda \equiv b$).
  - Funkcja gęstości rozkładu *Exp*(λ): $p(x) = f_{Exp}(x\,|\,\lambda) = \lambda \exp\{-\lambda x\}$
  - Dystrybuanta rozkładu *Exp*(λ): $F_{Exp}(x\,|\,\lambda) = 1 - \exp\{-\lambda x\}$
  - Charakterystyki rozkładu wykładniczego *Exp*(λ):

$E(x) = \frac{1}{\lambda}$	$Mo(x) = 0$	$Var(x) = \frac{1}{\lambda^2}$
$Q_\alpha(x) = \frac{-\ln(1-\alpha)}{\lambda}$		
$Q_{0,25}(x) = \frac{\ln(4/3)}{\lambda}$	$Me(x) = Q_{0,5}(x) = \frac{\ln 2}{\lambda}$	$Q_{0,75}(x) = \frac{\ln(4)}{\lambda}$

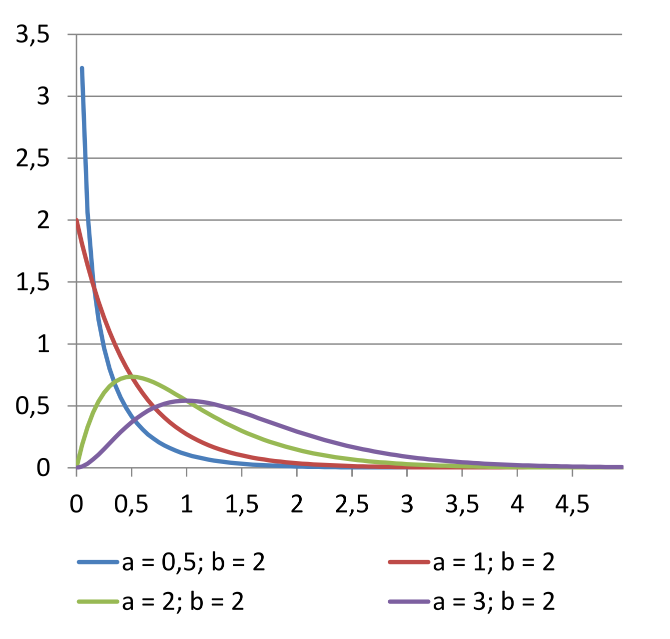
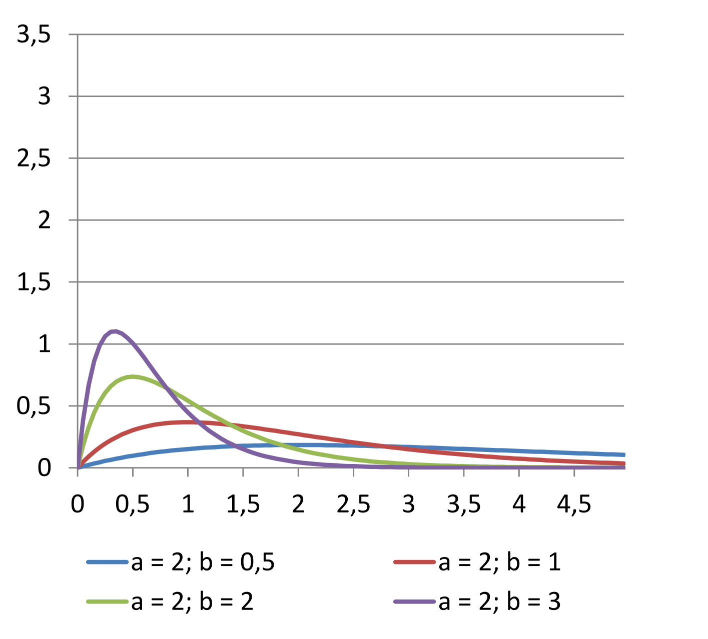
[1] Istnieją **dwie parametryzacje** rozkładu gamma. Na gruncie statystyki bayesowskiej częściej wykorzystywana jest ta prezentowana w niniejszym materiale. W drugiej, alternatywnej parametryzacji, funkcja gęstości rozkładu gamma zapisywana jest w następującej postaci:

$$p(x) = f_G(x\,|\,k,\theta) = \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} x^{k-1} \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\},$$

gdzie $k > 0$ jest parametrem kształtu (w odniesieniu do parametru a w pierwszej parametryzacji zachodzi związek: $a = k$), natomiast θ – parametrem skali (w odróżnieniu od parametru b w pierwszej parametryzacji, w której b jest *odwrotnością* parametru skali, tj. $b = 1/\theta$, lub inaczej parametrem *tempa*; ang. *rate parameter*). W parametryzacji tej zachodzi: $E(x) = k\theta$ i $Var(x) = k\theta^2$. Choć parametryzacja ta nie będzie tu szczegółowo omawiana ani wykorzystywana w czasie naszych zajęć, należy zaznaczyć, że funkcje statystyczne w MS Excel związane z rozkładem gamma operują właśnie w niej (tj. w tej z parametrem θ). **Dlatego wykorzystując te funkcje przy „naszej” parametryzacji – tej z parametrem *b* – należy pamiętać, aby w miejsce argumentu θ funkcji w Excel – tam oznaczanego jako „beta” – wstawić wartość 1/*b*.** Przykładowo: wartość funkcji gęstości rozkładu gamma $G(a = 2, b = 3)$ w argumencie $x = 1$ obliczamy za pomocą funkcji:

=ROZKŁ.GAMMA(x = 1; alfa = *a* = 2; **beta = 1/*b* = 1/3**; skumulowany = FAŁSZ)

- **W statystyce bayesowskiej** rozkład gamma jest rozkładem sprzężonym dla:
  - parametru rozkładu Poissona
  - parametru rozkładu wykładniczego
  - odwrotności parametru skali w samym rozkładzie gamma
- **Wykresy funkcji gęstości rozkładu *G*(*a*, *b*) dla wybranych wartości *a* i *b*:**

a ∈ {0,5; 1; 2; 3}; *b* = 2	*a* = 2; *b* ∈ {0,5; 1; 2; 3}
	

- Wyznaczanie wartości a i b ($a, b > 0$) dla zadanych wartości $E(x) \equiv m > 0$ i $Var(x) \equiv v$:

$$a = \frac{m^2}{v}$$

$$b = \frac{m}{v}$$